

Szeregi geometryczne

Zadanie 1. (1 pkt)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , taki, że: $a_1 = 5$ oraz $q = \frac{2}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu geometrycznego.

Zadanie 2. (3 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) , taki, że: $a_1 = 2$ oraz $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k - 2)$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie parametry k , dla których szereg:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

jest zbieżny.

Zadanie 3. (3 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości x dla których poniższy szereg jest zbieżny:

$$1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \dots$$

Zadanie 4. (4 pkt)

Rozwiąż równanie:

$$x + \frac{x^2}{2x+1} + \frac{x^3}{(2x+1)^2} + \dots = \frac{3}{2}$$

gdzie lewa strona jest szeregiem zbieżnym.

Zadanie 5. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x}{x^2-3} + \left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{x^2-3}\right)^3 + \dots \leq 0$$

gdzie lewa strona jest szeregiem zbieżnym.

Zadanie 6. (3 pkt)

Dana jest spirala zbudowana z półokręgów o promieniach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ (zobacz rysunek).

Oblicz długość spirali i wyznacz punkt M do którego jest zbieżna spirala.

