

Logarytmy

Wzory podstawowe

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$n \cdot \log_a b = \log_a (b^n)$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Wzory rozszerzone

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + 2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4}{5}} - \log_3 \sqrt[7]{9}$

b) $(\sqrt{2})^{\log_2 \sqrt{3}}$

c) $\log_7 9 \cdot \log_9 \sqrt{7}$

d) $\log_a b \cdot \log_b c$

e) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

f) $\log_3 49 \cdot \log_7 9$

g) $\log_{\sqrt[7]{3}} \sqrt{5} \cdot \log_{125} \sqrt[4]{27}$

h) $\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_8 27$

i) $8^{\frac{1}{\log_3 8}} - (\sqrt{2})^{\frac{1}{\log_9 2}}$

j) $(\sqrt[4]{3})^{\log_3 4 \cdot \log_2 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 5}$

Zadanie 2. (2pkt)

Wykaż, że $\log_{17} 19 : \log_{18} 19 = \log_{16} 18 \cdot \log_{17} 16$.

Zadanie 3. (3pkt)

Dane są liczby $a = \log_3 2$ oraz $b = \log_{2^{2024}} 3^{1012} + \log_{\frac{1}{3}} 54$. Wyraź liczbę b za pomocą liczby a .

Zadanie 4. (3pkt)

Wiadomo, że $\frac{1}{\log_{p-q} 2} = 3$ oraz $(\log_{pq} 3)^{-1} = 2$. Udowodnij, że liczba $\sqrt{p^2 - 1 + q^2}$ jest wymierna.

Zadanie 5. (4pkt)

Wiadomo, że $\log_a m = \sqrt{2}$. Oblicz $3 \log_{\sqrt{m}} am^2 - \log_{am} \frac{a^2}{m}$.

Zadanie 6. (4pkt)

Wykaż, że dla $a, b, c > 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ liczba $\frac{\log_a b^3 \cdot \log_b 2c}{\log_3 \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{c}}$ jest parzysta.

Zadania dowodowe

Zadanie 1. (3pkt)

Wykaż, że suma sześciątów dwóch kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.

Zadanie 2. (3pkt)

Wykaż, że iloczyn sześciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 720.

Zadanie 3. (3pkt)

Udowodnij, że liczba $3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^9$ ma 480 dzielników.

Zadanie 4. (3pkt)

Wiadomo, że $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 7$ oraz $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Wykaż, że $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18$.

Zadanie 5. (2pkt)

Liczba a przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5, a liczba b przy dzieleniu przez 11 daje resztę 6. Wykaż, że iloczyn $a \cdot b$ przy dzieleniu przez 11 daje resztę 8.

Zadanie 6. (2pkt)

Wykaż, że liczba $3^{32} - 2^{24}$ ma przynajmniej dwa dzielniki, które są jednocześnie większe od 2^5 i mniejsze od 3^5 .

Zadanie 7. (4pkt)

Wykaż, że dla $a > 1$ i $b > -1$ prawdziwa jest nierówność $a^2 - ab + b^2 > 3(a - b - 1)$.

Wielomiany - wprowadzenie - materiał dodatkowy**Ćwiczenie 1.** Zapisz w postaci iloczynowej:

- a) $x^4 + x =$
- b) $15x^2 - 5x =$
- c) $4x^3 + 2x^2 + 6x =$
- d) $7x^3 - 7x =$
- e) $7x^2y + 10xy =$
- f) $x^2(x - 1) + 10(x - 1) =$
- g) $(a^2 - b^2)(ab - 1) - (a^2 - b^2)(1 - 2ab) =$
- h) $2x^3 - 6x^2 - x + 3 =$

Ćwiczenie 2.Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$.**Ćwiczenie 3.**Dany jest wielomian $W(x) = \sqrt{2}x - x^3 + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}x^2$.**Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.**Wielomian $W(x)$:

- A. ma dokładnie 1 miejsce zerowe.
- B. ma dokładnie 2 miejsca zerowe.
- C. ma dokładnie 3 miejsca zerowe.
- D. ma miejsce zerowe równe 1.
- E. ma miejsce zerowe równe $\sqrt{2}$.
- F. ma miejsce zerowe równe $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 4.Rozwiązaniem równania $(2x^2 + 1)(5x + m) = 0$ jest liczba $x = 2$ dla parametru m równego

A. -10

B. 5

C. 10

D. 20

Ćwiczenie 5.Liczba $x = 3$ jest miejscem zerowym wielomianu $W(x) = x^3 + kx^2 - 2x - 2k$ dlaA. $k = -3$ B. $k = -1$ C. $k = 1$ D. $k = 3$ **Ćwiczenie 6.**Wyznacz wszystkie parametry m dla których równanie $x^3 + x^2 - mx - m = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.**Ćwiczenie 7.**

Wykaż, że równanie

$$x(x - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} - x)^2$$

ma dokładnie 2 rozwiązania rzeczywiste.

Pierwiastki całkowite wielomianu

Twierdzenie

Jeżeli wielomian:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych oraz $a_0 \neq 0$, ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Zadanie 1. (3pkt)

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x^3 + 11x^2 - 21x - 5$.

Zadanie 2. (2pkt)

Wykaż, że równanie $2x^4 + 3x^2 = 2$ nie ma rozwiązań wśród liczb całkowitych.

Zadanie 3. (3pkt)

Wyznacz wszystkie parametry m , dla których wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + m^2x - 81$ ma pierwiastek, który jest liczbą pierwszą.

Twierdzenie o reszcie

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $w(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Twierdzenie o reszcie

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu $w(x)$ przez dwumian $x - a$, to $w(a) = r$.

Ćwiczenie 1.

Wyznacz parametr m dla którego wielomian $W(x) = x^3 - mx^2 + x - 3$ jest podzielny przez dwumian $(x - 3)$.

Ćwiczenie 2.

Oblicz resztę z dzielenia $W(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$ przez dwumian $(x + 2)$.

Ćwiczenie 3.

Oblicz resztę r z dzielenia $W(x) = x^2(x - 5)(x - 8,5)(x - 11)$ przez dwumian:

a) $(x - 5)$

b) $(x + 1)$

Zadanie 1. (2pkt)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 + a^2x^2 - x + 1$ przez dwumian $(x - 1)$ jest równa 5. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 2)$.

Zadanie 2. (2pkt)

Dla jakiego parametru m wielomian $W(x) = x^5 - 7x^2 + m^2 - 11$ dzieli się przez dwumian $(x - 2)$?

Zadanie 3. (3pkt)

Dla jakiego parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ przez dwumian $(x - 1)$ jest taka sama jak reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x + 2)$?

Zadanie 4. (5pkt)

Wielomian $W(x)$ jest 4 stopnia, przechodzi przez początek układu współrzędnych i ma oś symetrii $x = 1$. Reszta z dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - 1)$ jest równa (-1) , a reszta z dzielenia przez dwumian $(x + 1)$ jest równa 5. Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.

Trójkąt Pascala i symbol Newtona

Wzór dwumianowy Newtona

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ - to symbol Newtona.

Trójkąt Pascala

1	→	$n = 0$	$(a + b)^0 = 1$
1 1	→	$n = 1$	$(a + b)^1 = 1a + 1b$
1 2 1	→	$n = 2$	$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
1 3 3 1	→	$n = 3$	$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
1 4 6 4 1	→	$n = 4$	$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
1 5 10 10 5 1	→	$n = 5$	
1 6 15 20 15 6 1	→	$n = 6$	
1 7 21 35 35 21 7 1	→	$n = 7$	

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\binom{10}{3} =$

b) $\binom{50}{47} =$

c) $\binom{n}{k} - \binom{n}{n-k} =$

d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{n-1} =$

Zadanie 2.

Wykaż, że $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Zadanie 3. (2pkt)

Oblicz $\binom{n}{n-5}$ wiedząc, że $\binom{n}{n-2} = 190$.

Zadanie 4. (3pkt)

Oblicz dwie ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby 52^{13} .

Zadanie 5. (3pkt)

Udowodnij, że liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr zapisu dziesiętnego liczby 2029^{2025} jest podzielna przez 7.

Zadanie 6. (4pkt)

Wykaż, że liczba $24^{2025} + 1$ jest podzielna przez 11.

Równania dwukwadratowe

Zadanie 1.

Rozwiąż równania:

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

b) $2x^4 - 3(1 - x^2) = -2x^2$

c) $\left(x^2 + \frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(x^2 + \frac{5}{2}\right) + 6 = 0$

d) $(2x^2 + 2x + 1)^2 + 3(2x^2 + 2x + 1) = 10$

e) $4x^5 - 12x^3 = -9x$

f) $x^6 - x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 6x = 9$

Nierówności wielomianowe

Zadanie 1. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^3 + 2x^2 - 3x - 6 > 0$

Zadanie 2. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^3 + x^2 - 16x + 20 \leq 0$

Zadanie 3. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(x^2 - 1)(x + 2)^2(x - 5) \geq 0$

Zadanie 4. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(x^2 - 1)(x + 2)^2(5 - x) \geq 0$

Zadanie 5. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(3 - x)^4(x^2 + 1)^2(x - 5)(x - 6)^3 < 0$

Zadanie 6. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $(x + 3)^4(x^2 + 1)^2(x - 5)(6 - x)^3 < 0$

Zadanie 7. (3 pkt)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = -x^3 + (m - 5)x^2 - 3x + 3$ przez dwumian $x - 2$ jest równa (-7) . Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Wyrażenia wymierne - powtórka z podstawy

Ćwiczenie 1.

Uprość wyrażenia:

a) $\frac{6x}{x+1} \cdot \frac{x-1}{2x^2} =$

b) $\frac{x^2-1}{3-x} \cdot \frac{x-2}{x+1} =$

c) $\frac{x+2}{x+1} : \frac{x^2-4}{2x^2} =$

Ćwiczenie 2.

Uprość wyrażenia:

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} =$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} =$

c) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1} =$

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równania:

a) $\frac{x(x-4)}{x(x+3)} = 0$

b) $\frac{(x+\sqrt{2})(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 0$

c) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x(9x^2-1)} = 0$

d) $\frac{(2x-4)(x+1)}{(2-x)(x-1)} = 0$

e) $\frac{(x^2-9)(x+1)}{x^2+5x+6} = 0$

Ćwiczenie 4.

Dane jest wyrażenie:

$$W(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x+3}$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz **P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** - jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -3$.	P	F
Wyrażenie $W(x)$ jest równoważne wyrażeniu $\frac{3x-x^2+3}{x^2+3x}$.	P	F

Ćwiczenie 5.

Równanie:

$$\frac{(x-5)^2(2x-6)(x-7)}{(x-2)(x-3)} = 0$$

ma w zbiorze liczb rzeczywistych:

- A. dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 5$.
- B. dokładnie dwa rozwiązania: $x = 5, x = 7$.
- C. dokładnie trzy rozwiązania: $x = 3, x = 5, x = 7$.
- D. dokładnie cztery rozwiązania: $x = 2, x = 3, x = 5, x = 7$.

Ćwiczenie 6.

Rozwiąż równanie:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+3)}{x(x^2-1)} = 0$$

Nierówności wymierne

Zadanie 1. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $\frac{x-4}{2-x} \leq 0$

Zadanie 2. (3 pkt)

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{2-x} < \frac{3}{x-4}$

Zadanie 3. (3 pkt)

Rozwiąż nierówność $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$

Zadanie 4. (3 pkt)

Rozwiąż nierówność $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \geq \frac{3}{(x-1)(x+1)}$

Zadanie 5. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $\frac{x^2-3}{3x-100-2x^2} < 0$

Zadanie 6. (2 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \frac{\sqrt{x-2} + \log_2 x}{(x+4)(x+5)(x-3)^2}$ i udowodnij, że funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

Wartość bezwzględna – równania i nierówności

Ćwiczenie 1.

Zapisz wyrażenie bez wartości bezwzględnej:

a) $|1 + \sqrt{7}| - |2 - \sqrt{7}|$

b) $3|x - 2| + 2|2 - x|$

c) $\frac{|x-1|}{|1-x|}$

d) $\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{|3-x|}$

Zadanie 1. (2 pkt)

Rozwiąż równania:

a) $|2 + |x - 3|| = 4$

b) $|2x + 1| = |3 - x|$

c) $|x - 4| = 2x - 5$

d) $|x + 2| + |2x - 6| = x + 4$

Zadanie 2. (3 pkt)

Rozwiąż nierówności:

a) $|x + 2| < 5$

b) $|2 + |x - 3|| \geq 4$

c) $|x| + 2x \leq 3$

d) $|x + 3| - |2 - x| > 2x - 1$

e) $3|x - 3| - \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x < 2$

f) $|2x - 1| + |3x - 2| + 2 \leq \sqrt{3}$

Zadanie 3. (3 pkt)

Wykaż, że: $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 2$.

Zadanie 4. (3 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x < -1$ wyrażenie:

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - 2|x| - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

jest liczbą całkowitą.

Równania kwadratowe z parametrem i wzory Viete'a

Wzory Viete'a

Jeżeli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Zadanie 1. (6 × 6pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których równanie:

$$(m^2 - 4)x^2 - (2m + 3)x + 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania:

- a) dodatnie.
- b) ujemne.
- c) jednakowych znaków.
- d) różnych znaków.
- e) jedno mniejsze od 2, a drugie większe od 2.
- f) spełniające warunek: $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \leq \frac{12m+26}{m^4-8m^2+16}$.

Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których równanie:

$$x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 4 = 0$$

ma dwa rozwiązania x_1 oraz x_2 spełniające warunek:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 12$$

Ćwiczenie na wzory Viete'a:

Zapisz za pomocą wyrażeń $x_1 + x_2$ oraz $x_1 \cdot x_2$:

- a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$
- b) $(x_1 - x_2)^2$
- c) $(x_1 + 5x_2)(x_2 + 5x_1)$
- d) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$
- e) $x_1^3 + x_2^3$
- f) $(|x_1| + |x_2|)^2$

Układy równań

Zadanie 1. (5pkt)

Dany jest okrąg o równaniu $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 30 = 0$.

Wyznacz współrzędne punktu leżącego na okręgu, który znajduje się najdalej początku układu współrzędnych.

Zadanie 2. (5pkt)

Dane są okręgi o równaniach: $(x + 2)^2 + y^2 = 13$ oraz $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

Wyznacz punkt przecięcia tych okręgów, który spełnia warunek, że iloczyn jego współrzędnych jest liczbą ujemną.

Zadanie 3. (6pkt)

Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} mx + y - 4 = 0 \\ 4x + my - m = 0 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y oraz parametrem m .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $x + y \geq 4$.