

Zadania dowodowe

Zadanie 1. (3pkt)

Wykaż, że suma sześciątów dwóch kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.

Zadanie 2. (3pkt)

Wykaż, że iloczyn sześciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 720.

Zadanie 3. (3pkt)

Udowodnij, że liczba $3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^9$ ma 480 dzielników.

Zadanie 4. (3pkt)

Wiadomo, że $x + y = 3$ i $x^2 + y^2 = 7$ oraz $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Wykaż, że $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18$.

Zadanie 5. (2pkt)

Liczba a przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5, a liczba b przy dzieleniu przez 11 daje resztę 6. Wykaż, że iloczyn $a \cdot b$ przy dzieleniu przez 11 daje resztę 8.

Zadanie 6. (2pkt)

Wykaż, że liczba $3^{32} - 2^{24}$ ma przynajmniej dwa dzielniki, które są jednocześnie większe od 2^5 i mniejsze od 3^5 .

Zadanie 7. (4pkt)

Wykaż, że dla $a > 1$ i $b > -1$ prawdziwa jest nierówność $a^2 - ab + b^2 > 3(a - b - 1)$.