

Logarytmy

Wzory podstawowe

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$

$$n \cdot \log_a b = \log_a (b^n)$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Wzory rozszerzone

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 5 + 2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4}{5}} - \log_3 \sqrt[7]{9}$

b) $(\sqrt{2})^{\log_2 \sqrt{3}}$

c) $\log_7 9 \cdot \log_9 \sqrt{7}$

d) $\log_a b \cdot \log_b c$

e) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

f) $\log_3 49 \cdot \log_7 9$

g) $\log_{\sqrt[7]{3}} \sqrt{5} \cdot \log_{125} \sqrt[4]{27}$

h) $\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_8 27$

i) $8^{\frac{1}{\log_3 8}} - (\sqrt{2})^{\frac{1}{\log_9 2}}$

j) $(\sqrt[4]{3})^{\log_3 4 \cdot \log_2 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 5}$

Zadanie 2. (2pkt)

Wykaż, że $\log_{17} 19 : \log_{18} 19 = \log_{16} 18 \cdot \log_{17} 16$.

Zadanie 3. (3pkt)

Dane są liczby $a = \log_3 2$ oraz $b = \log_{2^{2024}} 3^{1012} + \log_{\frac{1}{3}} 54$. Wyraź liczbę b za pomocą liczby a .

Zadanie 4. (3pkt)

Wiadomo, że $\frac{1}{\log_{p-q} 2} = 3$ oraz $(\log_{pq} 3)^{-1} = 2$. Udowodnij, że liczba $\sqrt{p^2 - 1 + q^2}$ jest wymierna.

Zadanie 5. (4pkt)

Wiadomo, że $\log_a m = \sqrt{2}$. Oblicz $3 \log_{\sqrt{m}} a m^2 - \log_{am} \frac{a^2}{m}$.

Zadanie 6. (4pkt)

Wykaż, że dla $a, b, c > 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ liczba $\frac{\log_a b^3 \cdot \log_b 2c}{\log_{\sqrt[3]{a^n}} \sqrt[4]{c}}$ jest parzysta.