

Funkcja kwadratowa

Postać ogólna

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Postać kanoniczna

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Wierzchołek $W = (p, q)$

$$p = -\frac{b}{2a} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$q = f(p)$$

Delta i miejsca zerowe

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Postać iloczynowa

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Przykład:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

Miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \quad \vee \quad x_2 = \frac{2 - 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = -1$$

Postać kanoniczna:

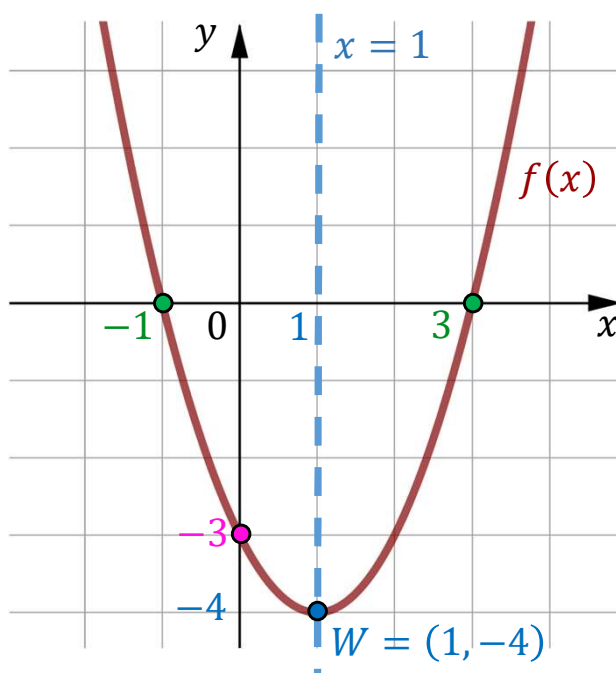
$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$

$$a = 1, \quad p = 1, \quad q = -4$$

$$W = (1, -4)$$

Postać iloczynowa:

$$f(x) = (x - 3)(x + 1)$$



Zadanie 1. Wyznacz wierzchołek oraz naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = (x - 1)^2 + 2$

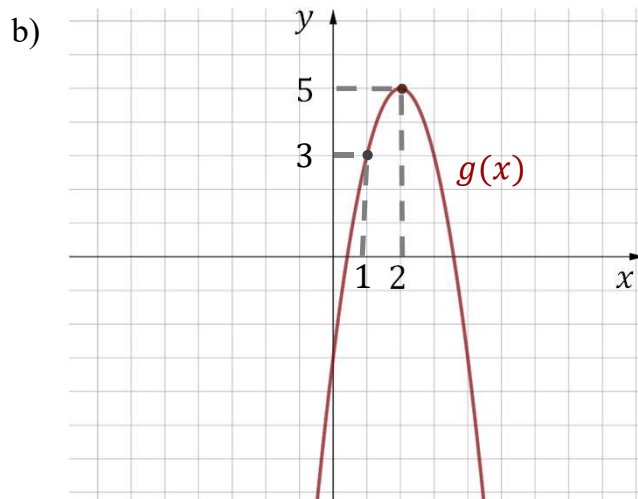
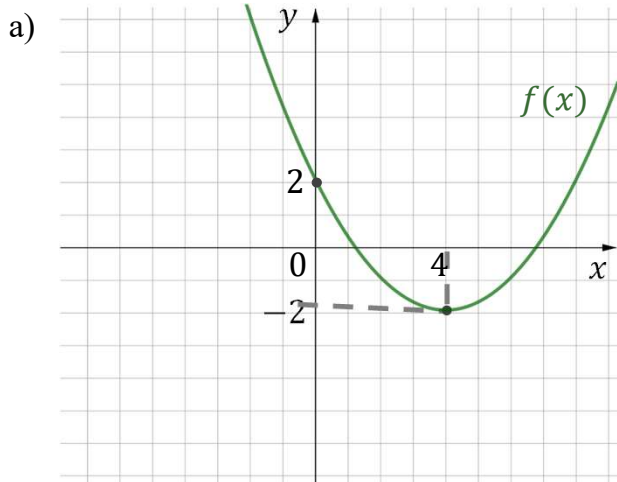
d) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 4$

b) $y = -2(x + 3)^2 + 1$

e) $y = -(x - 5)^2 - 2$

c) $y = -(x - 2)^2 + 3$

Zadanie 2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o danej paraboli:



Zadanie 3. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykres przechodzi przez punkty:

a) $A = (1, 3), B = (3, 3), C = (0, 6)$

b) $A = (1, -2), B = (2, -3), C = (3, -6)$

Zadanie 4. Zapisz postać kanoniczną funkcji $f(x) = x^2 + 7x + 14$.

Zadanie 5. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x)$ jeśli istnieją:

a) $f(x) = 2x^2 - 6$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = x^2 + 4$

e) $f(x) = -2x^2 - 3x$

c) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 8$

f) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

Zadanie 6. Rozwiąż równania kwadratowe:

a) $2x^2 - 6 = 0$

d) $x^2 - 6x = -9$

b) $x^2 + 4 = 0$

e) $-2x^2 - 3x = 0$

c) $2(x - 3)^2 = 8$

f) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

Zadanie 7. Iloczyn pewnej liczby naturalnej i liczby od niej o 4 większej jest równy 60. Wyznacz te liczby.

Zadanie 8. Powierzchnia latawca w kształcie rombu jest równa $0,24 \text{ m}^2$. Jedna przekątna tego latawca jest o $0,2 \text{ m}$ dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego latawca.

Zadanie 9. Dla jakiego parametru m rozwiązaniem równania $x^2 + (m^2 - 1)x - 2 = 0$ jest liczba 2.

Zadanie 10. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej m równanie $(m - 1)x^2 + mx + 1 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

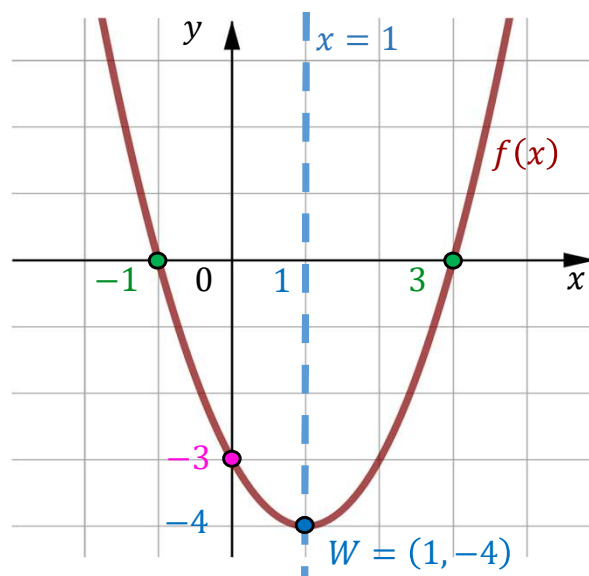
Zadanie 11. Wyznacz postać iloczynową funkcji kwadratowej $f(x)$ jeśli istnieje.

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $f(x) = -2x^2 + 16$ | d) $f(x) = x^2 - 8x + 16$ |
| b) $f(x) = 3x^2 + 1$ | e) $f(x) = -2x^2 - 5x$ |
| c) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$ | f) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ |

Zadanie 12. Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Funkcja:

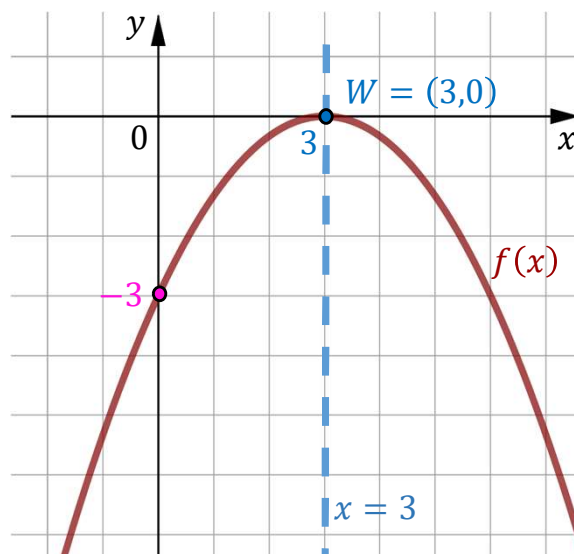
- ma **oś symetrii**:
- ma **miejsca zerowe**:
- przecina oś OY w punkcie
- jest **malejąca** dla
- jest **rosnąca** dla
- przyjmuje **wartość najmniejszą**:
- przyjmuje **wartość największą**:
- przyjmuje **wartości dodatnie** dla
- przyjmuje **wartości ujemne** dla
- przyjmuje wartości nieujemne dla
- przyjmuje wartości niedodatnie dla



Zadanie 12'. Omów własności funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Funkcja:

- ma oś symetrii:
- ma miejsca zerowe:
- przecina oś OY w punkcie
- jest malejąca dla
- jest rosnąca dla
- przyjmuje wartość najmniejszą:
- przyjmuje wartość największą:
- przyjmuje wartości dodatnie dla
- przyjmuje wartości ujemne dla
- przyjmuje wartości nieujemne dla
- przyjmuje wartości niedodatnie dla



Zadanie 13. Rozwiąż nierówności:

- | | | | |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $x^2 + 5x + 6 < 0$ | d) $-2x^2 - x < 1$ | h) $(x - 2)^2 \leq 0$ | h) $-x^2 - 10 < 3x$ |
| b) $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ | e) $-2x^2 - x \leq 1$ | i) $(x - 2)^2 < 0$ | i) $-x^2 - 10 \leq 3x$ |
| c) $x^2 + 5x + 6 > 0$ | f) $-2x^2 - x > 1$ | j) $(x - 2)^2 > 0$ | j) $-x^2 - 10 > 3x$ |
| d) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ | g) $-2x^2 - x \geq 1$ | k) $(x - 2)^2 \geq 0$ | k) $-x^2 - 10 \geq 3x$ |

Zadanie 14. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)$ na przedziale:

- $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ na przedziale $\langle -1, ; 2 \rangle$
- $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ na przedziale $\langle 3, ; 4 \rangle$
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$ na przedziale $\langle -1, ; 2 \rangle$
- $f(x) = x^2 - 2x - 3$ na przedziale $\langle 2, ; 4 \rangle$

Zadanie 15. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f , wiedząc, że przyjmuje ona wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (1, 5)$, a najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -3, 3 \rangle$ jest równa (-6) .

Zadanie 16. Z kawałka blachy w kształcie trójkąta o podstawie 4 m i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 3 m wycinamy prostokąt równoległy do podstawy (zobacz rysunek). Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe? Oblicz to pole.

Zadanie 17. Właściciel sklepu kupuje towar w cenie 20 zł za sztukę i sprzedaje po 80 zł za sztukę. Przy takiej cenie sprzedaje dziennie 10 sztuk towaru. Badając rynek zauważył, że każda obniżka ceny towaru o 5 zł powoduje wzrost dziennej sprzedaży o 2 sztuki. Ile obniżek o 5 zł powinien wykonać właściciel sklepu, aby jego dzienny zysk był największy? Oblicz ten zysk.

Funkcja kwadratowa (rozszerzenie)

Wzory Viete'a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Zadanie 18. Wykaż, że funkcja kwadratowa:

$$f(x) = (1 - \sqrt{5})x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})x + \sqrt{3}$$

ma dwa miejsca zerowe różnych znaków.

Zadanie 19. Zapisz warunki na parametry a, b, c funkcji kwadratowej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dla których funkcja f ma:

- a) dwa miejsca zerowe dodatnie
- b) dwa miejsca zerowe przeciwnych znaków
- c) dwa miejsca zerowe mniejsze od 5
- d) dwa miejsca zerowe różniące się o 3
- e) dwa miejsca zerowe, których suma odwrotności jest równa 1
- f) jedno miejsce zerowe dodatnie
- g) brak miejsc zerowych

Zadanie 20. Wyznacz wszystkie parametry m , dla których funkcja $f(x) = (m - 1)x^2 + mx - 3$ ma dwa miejsca zerowe z przedziału $(-1, 0)$.

Zadanie 21. Rozwiąż równania:

- a) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
- b) $(x^2 - 2)^2 - 2(x^2 - 2) - 3 = 0$
- c) $\sqrt{x} + x = 5$
- d) $\sqrt{x - \sqrt{x + 2}} = 2$