

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Poniższe zadania są za dużą liczbę punktów, ponieważ umieściłem w nich dużo poleceń do wykonania (dla lepszego treningu w ramach jednego przykładu). Na maturze gdyby pojawiło się takie zadanie, to miałoby mniej pytań i w konsekwencji mniej punktów.

Zadanie 1. (8 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^x + 1$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$. Dla obu funkcji ustal dziedzinę oraz zbiór wartości. Oblicz wartość obu funkcji dla argumentu $x = -3$.

Dla funkcji $f(x)$ wyznacz argument x dla którego funkcja osiąga wartość $(2\sqrt{2} + 1)$. Dla funkcji $g(x)$ wyznacz argument x dla którego funkcja osiąga wartość $8\sqrt{2}$.

Zadanie 2. (8 pkt)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \log_2(x - 2)$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}x + 2$. Dla obu funkcji ustal dziedzinę oraz zbiór wartości. Oblicz wartość obu funkcji dla argumentu $x = 4$. Wyznacz dla obu funkcji argument x dla którego funkcja osiąga wartość 5.

Zadanie 3. (12 pkt)

Wzór $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ opisuje masę izotopu promieniotwórczego o okresie połowicznego rozpadu T i masie początkowej m_0 , po upływie czasu t .

W żywym organizmie stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C jest liczbą stałą i wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilości radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje, a ilość izotopu ^{12}C pozostaje bez zmian. Czas połowicznego rozpadu izotopu ^{14}C to 5700 lat.

Zadanie 3.1 (2 pkt)

Naszkicuj wykres zależności masy izotopu ^{14}C w znalezisku archeologicznym w zależności od wieku tego znaleziska. Przyjmij, że w czasie $t_0 = 0$ masa izotopu ^{14}C wynosi m_0 . Zaznacz na wykresie punkty dla argumentów: $t_1 = T$ oraz $t_2 = 2T$.

Zadanie 3.2 (4 pkt)

Oblicz przybliżony wiek znaleziska archeologicznego w którym zmierzona ilość izotopu ^{14}C jest

a) równa $\frac{1}{4}$ początkowej zawartości izotopu.

b) mniejsza od zawartości początkowej o 50%.

Zadanie 3.3 (3 pkt)

W pewnym znalezisku stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C jest równy $\frac{\frac{3}{2} \cdot 10^{-12}}{2\sqrt{2}}$. Oblicz przybliżony wiek tego znaleziska.

Zadanie 3.4 (3 pkt)

Wiek pewnego znaleziska datowany jest na 1425 lat. Oblicz ile wynosi stosunek ilości izotopu węgla ^{14}C do izotopu ^{12}C w tym znalezisku.