Zadanie 2. Oblicz prawdopodobieństwo, że losując jednocześnie trzy kule z urny zawierającej 7 kul żółtych, 5 kul niebieskich, 4 kule czerwone, 3 kule zielone i 2 kule pomarańczowe wylosujemy:

a) wszystkie kule tego samego koloru
b) dokładnie 2 kule niebieskie
c) wszystkie kule w kolorach ciepłych (żółty, czerwony, pomarańczowy)
d) więcej kul w kolorach ciepłych niż w kolorach zimnych,
e) kule, wśród których nie będzie żadnej kuli kolory czerwonego,
f) co najmniej jedną kulę pomarańczową,
g) co najwyżej 2 kule w kolorach podstawowych (żółty, czerwony, niebieski)

<u>Rozwiązanie:</u>

$\Omega -$ zbiór możliwych losowań trzech kul z urny.

Wszystkich kul mamy łącznie:

$$7+5+4+3+2=21$$

Losujemy 3 kule z 21 zatem:

$$|\Omega| = \binom{21}{3} = \frac{21!}{3!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20\cdot 21}{6} = 19\cdot 10\cdot 7$$

a) A – zdarzenie polegające na wylosowaniu trzech kul tego samego koloru.

Zatem interesują nas te losowania, w których wyciągamy albo 3 kule żółte, albo 3 kule niebieskie, albo 3 kule czerwone, albo 3 kule zielone (nie da rady wylosować albo 3 kul pomarańczowych, bo są tylko 2 do dyspozycji.

Więc:

$$|A| = \binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}$$

na tyle sposobów możemy 3 kule żółte spośród 7 dostępnych

na tyle sposobów możemy 3 kule niebieskie spośród 5 dostępnych

na tyle sposobów możemy 3 kule czerwone spośród 5 dostępnych

na tyle sposobów możemy 3 kule zielone spośród 3 dostępnych

Liczymy:

$$|A| = \binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} + \frac{5!}{3!\cdot 2!} + \frac{4!}{3!\cdot 1!} + 1 =$$

$$= \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} + \frac{4\cdot 5}{2} + 4 + 1 = 35 + 10 + 5 = 50$$

Zatem:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{50}{19\cdot 10\cdot 7} = \frac{5}{19\cdot 7} = \frac{5}{133}$$

b) $B -$ zdarzenie polegające na wylosowaniu dokładnie 2 kul niebieskich

Czyli losujemy 2 kule z 5 kul niebieskich i jedną z pozostałych $(21 - 5 = 16)$ kul

$$|B| = \binom{5}{2}\cdot\binom{16}{1} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 16 = 10\cdot 16 = 160$$

Zatem:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{160}{19\cdot 10\cdot 7} = \frac{16}{19\cdot 7} = \frac{16}{133}$$

c) $C -$ zdarzenie polegające na wylosowaniu 3 kul w kolorach: żółtym, czerwonym, lub pomarańczowym.

Mamy zatem do wyboru tylko:

$$7 + 4 + 2 = 13$$

kul.

Więc:

$$|C| = \binom{13}{3} = \frac{13!}{3!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13}{6} = 11\cdot 2\cdot 13$$

Zatem:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{11\cdot 2\cdot 13}{19\cdot 10\cdot 7} = \frac{11\cdot 13}{19\cdot 5\cdot 7} = \frac{143}{665}$$

d) D $-$ zdarzenie polegające na wylosowaniu więcej kul w kolorach ciepłych niż w kolorach zimnych.

Chcemy zatem wylosować albo:

- 3 kule w kolorach ciepłych. Możemy to zrobić na:

$$\binom{13}{3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{6} = 11 \cdot 2 \cdot 13$$

sposobów.

- albo 2 kule w kolorach ciepłych i 1 w kolorze zimnym (niebieska lub zielona). Możemy to zrobić na:

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{21-13}{1} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} \cdot \binom{8}{1} = \frac{12 \cdot 13}{2} \cdot 8 = 6 \cdot 13 \cdot 8$$

Więc:

$$|D| = 11 \cdot 2 \cdot 13 + 6 \cdot 13 \cdot 8 = 13 \cdot (22 + 48) = 13 \cdot 70$$

Zatem:

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{13 \cdot 70}{19 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{13}{19}$$

e) E – zdarzenie polegające na wylosowaniu kul, wśród których nie będzie żadnej kuli kolory czerwonego.

Mamy zatem do wyboru wszystkie kule oprócz czerwonych. Jest ich:

$$21 - 4 = 17$$

Więc:

$$|E| = \binom{17}{3} = \frac{17!}{3! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{6} = 5 \cdot 8 \cdot 17$$

Zatem:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 17}{19 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{4 \cdot 17}{19 \cdot 7} = \frac{68}{133}$$

f) F – zdarzenie polegające na wylosowaniu co najmniej jednej kuli pomarańczowej.

Zrobimy przez zdarzenie przeciwne:
F' – zdarzenie polegające na wylosowaniu 3 kul, wśród których nie będzie ani jednej kuli pomarańczowej.
Mamy zatem do wyboru wszystkie kule oprócz pomarańczowych. Jest ich:

$$21 - 2 = 19$$

Więc:

$$|F'| = \binom{19}{3} = \frac{19!}{3! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{6} = 17 \cdot 3 \cdot 19$$

Zatem:

$$|F| = |\Omega| - |F'| = 19 \cdot 10 \cdot 7 - 17 \cdot 3 \cdot 19 = 19 \cdot (70 - 51) = 19 \cdot 19$$

Zatem:

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{19 \cdot 19}{19 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{19}{10 \cdot 7} = \frac{19}{70}$$

g) G – zdarzenie polegające na wylosowaniu co najwyżej 2 kule w kolorach podstawowych (żółty, czerwony, lub niebieski)

Kolorów podstawowych jest:

$$7 + 4 + 5 = 16$$

Wykorzystamy zdarzenie przeciwne:

G' – zdarzenie polegające na wylosowaniu dokładnie 3 kul w kolorach podstawowych.

$$|G'| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{6} = 7 \cdot 5 \cdot 16$$

Zatem:

$$|G| = |\Omega| - |\mathrm{G}'| = 19 \cdot 10 \cdot 7 - 7 \cdot 5 \cdot 16 = 7 \cdot (190 - 80) = 7 \cdot 110$$

$$P(G) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 110}{19 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{11}{19}$$