# Checklista do matury rozszerzonej 2026 - matemaks.pl

**Pytanie 1. (Tier S, 3 pkt na 70%)**

Czy umiesz wykonywać działania na **logarytmach**, w szczególności stosować **wzór na zamianę podstaw logarytmów**?

a) **(łatwe)** Wykaż, że: $\log_2 a + \log_{\frac{1}{8}} b = \log_2\left(\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right)$

b) **(łatwe)** Wykaż, że: $16^{\log_2 a} = a^4$

c) **(łatwe)** Uzasadnij, że: $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 = \log_2 7$

d) **(3 pkt)** Wykaż, że jeżeli $a = \log_3 20$ oraz $b = \log_{\sqrt{3}} 25$, to $\log_9 500 = \frac{2a+b}{4}$.

**Pytanie 2. (Tier A, 2 pkt na 90%)**

Czy umiesz analizować **funkcję wykładniczą w zagadnieniach praktycznych**?

a) **(łatwe)** Wiedząc, że funkcja $N(t) = a \cdot k^t$ przyjmuje dla $t = 0$ wartość 5, a dla $t = 3$ wartość 10, oblicz $N(6)$.

b) **(łatwe)** Pewna wielkość rośnie w stałym tempie 20% na jednostkę czasu. Wiedząc, że początkowo miała wartość 50, oblicz jej wartość po 5 jednostkach czasu.

c) **(łatwe)** Pewna substancja co 4 godziny zmniejsza swoją masę o połowę. Wiedząc, że początkowo było jej 80 g, oblicz masę tej substancji po 36 godzinach.

d) **(łatwe)** Rozwiąż nierówność $9 \cdot 3^{\frac{t}{2}} > 1$.

**Pytanie 3. (Tier C, 3 pkt na 20%)**

Czy umiesz obliczać **symbol Newtona** i stosować **wzór dwumianowy Newtona**?

a) **(łatwe)** Oblicz $\binom{100}{98}$.

b) **(3 pkt)** Dla $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$ oblicz $\binom{2n}{3}$ wiedząc, że $\binom{n-1}{n-3} = 4(n-2)$. Czy wiesz dlaczego jest to założenie, że $n \geq 3$?

c) **(3 pkt)** Wykaż, że liczba $101^{2026}$ przy dzieleniu przez 100 daje resztę 1.

**Pytanie 4. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy umiesz stosować **wzory skróconego mnożenia** w zadaniach dowodowych?

a) **(2 pkt)** Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x$ i $y$ takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

b) **(3 pkt)** Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{3^{20}+1} + \sqrt{3^{20}-1} < 2 \cdot 3^{10}$.

c) **(2 pkt)** Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x$ i $y$ prawdziwa jest nierówność $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (nierówność między średnimi)

d) **(3 pkt)** Wykaż, że liczba $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ jest całkowita.

**Pytanie 5. (Tier S+, 4 pkt na 40%)**

Czy umiesz rozwiązywać **równania i nierówności z wartością bezwzględną**?

a) **(2 pkt)** Rozwiąż równanie: $||x-2|-3| = 3$

b) **(2 pkt)** Rozwiąż równanie: $||2x+1|-7|+1 = 0$

c) **(3 pkt)** Rozwiąż równanie: $|x+1| + |x-3| = 1 - 3x$

d) **(3 pkt)** Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9} \leq 1 - 3x$

**Pytanie 6. (Tier A, 3 pkt na 20%)**

Czy umiesz rozwiązywać **równania dwukwadratowe** oraz **nierówności wielomianowe i wymierne**?

a) **(2 pkt)** Rozwiąż równanie: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

b) **(2 pkt)** Rozwiąż nierówność $(x+3)^2(x+1)(x-1)^2 > 0$

c) **(3 pkt)** Rozwiąż nierówność $\dfrac{(x+3)^2(x+1)(x-1)^2}{x^3(x+2)^2} \leq 0$

**Pytanie 7. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy umiesz obliczać **pierwiastki całkowite wielomianu** oraz **dzielić wielomian przez dwumian**?

a) **(2 pkt)** Wyznacz postać iloczynową i miejsca zerowe wielomianu: $W(x) = x^3 + 12x^2 + 21x - 98$

b) **(2 pkt)** Wykaż, że wielomian $W(x) = x^{2026} + 2027x^2 + 1$ nie ma pierwiastków całkowitych.

**Pytanie 8. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy znasz i umiesz stosować **twierdzenie Bézouta** i **Twierdzenie o reszcie wielomianu**?

a) **(łatwe)** Wiadomo, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-5)$. Oblicz $W(5)$.

b) **(łatwe)** Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x+1)$ otrzymano resztę 3. Oblicz $W(-1)$.

c) **(łatwe)** Dany jest wielomian $W(x) = (x+1)^2(x-2)$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu przez $(x-3)$.

d) **(3 pkt)** Dla jakiego parametru $m$ wielomian $W(x) = 2mx^3 + 5x - 7$ przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę 4? Oblicz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x-1)$.

**Pytanie 9. (Tier S, 5 pkt na 100%)**

Czy znasz i umiesz stosować **wzory Viete'a** do rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem?

a) **(łatwe)** Wypisz warunki na parametr $m$ dla których równanie $(m^2-1)x^2 + 2mx - 1$ ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

b) **(średnie)** Wypisz warunki na parametry $a, b, c$ dla których funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ na dwa różne rozwiązania dodatnie mniejsze od 5.

c) **(łatwe)** Jak zapisać za pomocą wzorów Viete'a wyrażenie: $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$?

**Pytanie 10. (Tier B, 2 pkt na 10%)**

Czy umiesz analizować **przekształcenia wykresów funkcji** także z parametrem?

a) **(łatwe)** Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Wykres funkcji $f(x)$ odbito względem osi odciętych, a następnie przesunięto o wektor $[4, -5]$ otrzymując wzór funkcji $g(x)$. Wyznacz wzór $g(x)$.

b) **(2 pkt)** Dana jest funkcja $f(x) = |x^2 - 1|$. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru $m$.

**Pytanie 11. (Tier B, 3 pkt na 20%)**

Czy umiesz analizować **układy równań z parametrem**?

a) **(2 pkt)** Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których układ równań:

$$\begin{cases} (m^2+1)x + 2y = 1 \\ 2x + (3+m)y = -m \end{cases}$$

jest nieoznaczony.

b) **(2 pkt)** Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru $m$, dla których układ równań:

$$\begin{cases} m^4x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

jest oznaczony.

**Pytanie 12. (Tier B, 2 pkt na 10%)**

Czy umiesz wyznaczać wzory **funkcji złożonych** i określać ich dziedziny?
Np. niech będą dane funkcje $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

a) **(2 pkt)** Wyznacz funkcję $(f \circ g)(x)$ czyli $f(g(x))$ i jej dziedzinę.

b) **(2 pkt)** Wyznacz funkcję $(g \circ f)(x)$ czyli $g(f(x))$ i jej dziedzinę.

**Pytanie 13. (Tier S+, 5 pkt na 90%)**

Czy umiesz rozwiązywać zadania łączące **ciąg arytmetyczny i geometryczny**?

a) **(4 pkt)** Liczby $(a, b, c)$ tworzą ciąg arytmetyczny o sumie wyrazów równej 4. Liczby $(-a, 2b, 3c)$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz iloczyn $a \cdot c$, a następnie wyznacz ciąg $(a, b, c)$.

**Pytanie 14. (Tier S+, 4 pkt na 50%)**

Czy wiesz co to jest **szereg geometryczny** i kiedy istnieje jego suma?

a) **(łatwe)** Ile wynosi suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie równym 10 i ilorazie $q = \frac{1}{2}$

b) **(3 pkt)** Wyznacz wszystkie wartości $x$ dla których poniższy szereg jest zbieżny:

$$1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)^3} + \ldots$$

**Pytanie 15. (Tier A, 2 pkt na 50%)**

Czy umiesz obliczać **granice ciągów**?

a) **(łatwe)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-n^2}{10n+7}$

b) **(łatwe)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+n}{7n-2}$

c) **(łatwe)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+n^3}{n^4}$

d) **(2 pkt)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(3n-7)}{n(5n+9)}$

e) **(2 pkt)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 5^n}$

f) **(2 pkt)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

g) **(2 pkt)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3})$

**Pytanie 16. (Tier A)**

Czy znasz definicje i wykresy **funkcji trygonometrycznych**? Czy umiesz z wykresów odczytywać wartości funkcji trygonometrycznych dla konkretnych kątów, zauważając jednocześnie wzory redukcyjne? Czy umiesz korzystać ze wzorów redukcyjnych i wzorów trygonometrycznych?

a) **(łatwe)** Odczytaj z wykresu wartość sinusa dla kąta $\frac{7}{6}\pi$?

b) **(łatwe)** Odczytaj z wykresu dla jakich kątów cosinus przyjmuje wartość 0?

c) **(średnie)** Wykaż, że $\frac{\sin 539^\circ + \sin 541^\circ}{\cos 540^\circ}$ jest liczbą wymierną.

d) **(średnie)** Jak można obliczyć $\cos 15^\circ$?

e) **(2 pkt)** Jeżeli $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, to ile jest równy $\sin 2x$?

**Pytanie 17. (Tier S, 4 pkt na 100%)**

Czy umiesz rozwiązywać **równania trygonometryczne**?

a) **(łatwe)** $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) = 0$

b) **(3 pkt)** $\sin x + \cos x = 1$

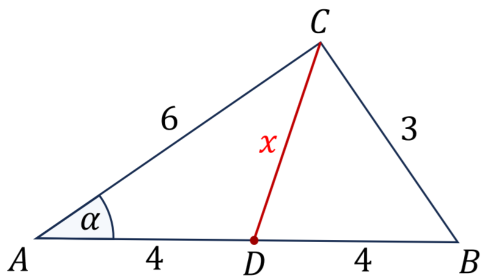
c) **(4 pkt)** $\sin(10x) + \sin(4x) = \cos(3x)$

**Pytanie 18. (Tier A, 3 pkt na 50%)**

Czy wiesz jak stosować **twierdzenie sinusów i cosinusów**?

a) **(łatwe)** Dany jest trójkąt o boku długości 3 i kącie $30^\circ$ na przeciwko tego boku. Oblicz długość promienia $R$ okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) **(3 pkt)** Dany jest trójkąt o bokach $|AB| = 8$, $|BC| = 3$, $|AC| = 6$. Oblicz długość środkowej $CD$ tego trójkąta.



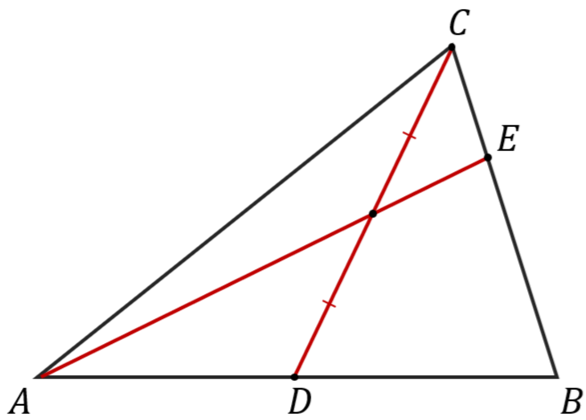

c) **(2 pkt)** Okrąg opisany na trójkącie $ABC$ ma promień $R$. Kąt $ACB$ jest rozwarty, a bok $AB$ ma długość $R$. Oblicz miarę kąta $ACB$.

**Pytanie 19. (Tier C, 3 pkt na 70%)**

Czy znasz **twierdzenie Talesa** i twierdzenie do niego odwrotne? Czy umiesz stosować **podobieństwo trójkątów** do zapisywania stosunków odcinków?
A może znasz nieobowiązkowe, ale przydatne **twierdzenie Menelaosa**, albo **Twierdzenie o potędze punktu** względem okręgu?

a) **(łatwe)** Czy umiesz udowodnić, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw?

b) **(3 pkt)** Z wierzchołka $C$ trójkąta $ABC$ poprowadzono środkową $CD$. Przez punkt $A$ i środek odcinka $CD$ poprowadzono prostą $AE$ (zobacz rysunek).




Wykaż, że $\dfrac{|CE|}{|EB|} = \dfrac{1}{2}$.

c) **(3 pkt)** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Przekątne $AC$ i $BD$ przecinają się w punkcie $P$. Udowodnij, że

$$|AP| \cdot |PC| = |BP| \cdot |PD|$$

**Pytanie 20. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy znasz własności **trójkątów i czworokątów** również wpisanych i opisanych na okręgu? W tym także przydatne **twierdzenie Ptolemeusza**?

a) **(łatwe)** Oblicz długość promienia okręgu opisanego oraz wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a$.

b) **(łatwe)** Jaka jest długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach 3, 4, 5?

c) **(łatwe)** W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przekątna $AC$ jest dwusieczną kąta $DAB$. Wykaż, że trójkąt $ACD$ jest równoramienny.

d) **(2 pkt)** Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Wiadomo, że: $|AB| = 2|BC|$ oraz $|CD| = 3|BC|$. Wykaż, że $|AD| = 4|BC|$.

e) **(3 pkt)** Punkt $D$ leży na krótszym łuku $AB$ okręgu opisanego na trójkącie równobocznym $ABC$. Wykaż, że $|CD| = |AD| + |BD|$.

**Pytanie 21. (Tier A, 3 pkt na 20%)**

Czy umiesz wykonywać działania na **wektorach**?

a) **(łatwe)** Dane są wektory $\vec{u} = [2, -3]$ oraz $\vec{w} = [1, 2]$. Wyznacz wektor $\vec{v} = 4\vec{w} - \vec{u}$.

b) **(2 pkt)** Dane są punkty $A = (0, 2)$, $B = (4, 0)$ oraz wektor $\overrightarrow{DC} = [1, 6]$, gdzie $D$ jest środkiem odcinka $AB$. Oblicz współrzędne punktu $C$.

c) **(4 pkt)** Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, takiego, że $\vec{DA} = [1, -2]$ oraz $\vec{DC} = [-3, 3]$.

**Pytanie 22. (Tier S, 2 pkt na 30%)**

Czy wiesz kiedy dwie proste są **równoległe** lub **prostopadłe**?

a) **(łatwe)** Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i prostopadłej do prostej: $2x + 3y + 4 = 0$.

b) **(3 pkt)** Wyznacz wszystkie parametry $m$ dla których proste: $(m^2 - 1)x - y + 1 = 0$ oraz $x - (m^2 - 3m + 2)y + 2m = 0$ są prostopadłe.

**Pytanie 23. (Tier S, 3 pkt na 50%)**

Czy umiesz wyznaczać **punkty przecięcia prostej z okręgiem** oraz **dwóch okręgów**?

a) **(2 pkt)** Wyznacz punkty przecięcia prostej $y = 2x - 1$ z okręgiem $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

b) **(3 pkt)** Wyznacz punkty wspólne dwóch okręgów: $o_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 4$ oraz $o_2 : (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

**Pytanie 24. (Tier S, 4 pkt na 30%)**

Czy umiesz wyznaczać równanie **stycznej do okręgu** przechodzącej przez zadany punkt? Czy umiesz w tym kontekście wykorzystać wzór na **odległość punktu od prostej**?

a) **(4 pkt)** Wyznacz równania stycznych do okręgu: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$, przechodzące przez punkt $A = (1, -4)$.

**Pytanie 25. (Tier B, 5 pkt na 50%)**

Czy umiesz zaznaczać **kąt dwuścienny w ostrosłupie** i przechodzić z obliczeniami do innych płaszczyzn?

a) **(5 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $a$, a kąt dwuścienny między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę $\alpha$. Oblicz wysokość ostrosłupa.

b) **(5 pkt)** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $a$, a wysokość ostrosłupa jest równa $H$. Oblicz cosinus kąta dwuściennego $\alpha$ między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

**Pytanie 26. (Tier B, 5 pkt na 50%)**

Czy umiesz wyznaczać i obliczać **przekroje brył** (sześcianu i ostrosłupów prawidłowych)?

a) **(4 pkt)** Sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi $a$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi $AB$, $AD$ oraz $GH$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

b) **(3 pkt)** Czworościan foremny $ABCD$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi $AB$, $AC$ oraz $BD$. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

**Pytanie 27. (Tier A, 4 pkt na 40%)**

Czy umiesz obliczać pola i objętości **brył obrotowych**?

a) **(3 pkt)** W stożek o kącie rozwarcia $120^\circ$ i tworzącej długości $\sqrt{3}$ wpisano kulę. Oblicz promień tej kuli.

**Pytanie 28. (Na rozgrzewkę)**

Czy wiesz jak stosować **permutację, kombinację i wariację** w sytuacjach kombinatorycznych?

a) **(łatwe)** Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 dziewczyn i 5 chłopców jeżeli mają stać na przemian?

b) **(łatwe)** W klasie jest 12 chłopców i 13 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać delegację złożoną z 2 chłopców i 3 dziewcząt?

c) **(łatwe)** W klasie jest 10 uczniów. Na ile sposobów można wybrać przewodniczącego, zastępcę i skarbnika klasy?

**Pytanie 29. (Tier D, 3 pkt na 40%)**

Czy umiesz obliczać **złożone sytuacje kombinatoryczne** korzystając z reguły dodawania, mnożenia i kombinacji?

a) **(3 pkt)** Oblicz, ile jest wszystkich liczb 6-cyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy, a cyfra 1 występuje dokładnie raz.

b) **(4 pkt)** Oblicz, ile jest wszystkich liczb 5-cyfrowych, w zapisie których występują co najmniej dwie cyfry 7.

**Pytanie 30. (Tier D, 3 pkt na 40%)**

Czy umiesz obliczać **prawdopodobieństwo klasyczne** w różnych sytuacjach kombinatorycznych?

a) **(3 pkt)** Spośród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równy 15.

b) **(3 pkt)** W urnie są kule białe i czarne. Kul czarnych jest 3 razy więcej niż białych. Przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul z tej urny prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednej kuli czarnej wynosi $\frac{2}{5}$. Oblicz, ile jest kul w urnie.

**Pytanie 31. (Tier E)**

Czy umiesz korzystać z **własności prawdopodobieństwa** i posługiwać się wzorem na **prawdopodobieństwo sumy zdarzeń** i wzorem na **prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego**?

a) **(łatwe)** Dane są prawdopodobieństwa: $P(A) = 0{,}7,\ P(B) = 0{,}6,\ P(A \cup B) = 0{,}8$. Oblicz $P(A \cap B)$.

b) **(2 pkt)** Dane są prawdopodobieństwa: $P(A) = \frac{5}{6},\ P(B) = \frac{2}{3}$, a $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym. Oblicz $P(A \cap B)$.

c) **(2 pkt)** Wiadomo, że $A \subset B,\ P(A) = 0{,}3,\ P(B) = 0{,}4$. Oblicz $P(A \cup B)$.

d) **(3 pkt)** Zdarzenia losowe $A$, $B$ są zawarte w $\Omega$ oraz $P(A \cap B') = 0{,}1$ i $P(A' \cap B) = 0{,}2$. Wykaż, że $P(A \cap B) \leq 0{,}7$.

**Pytanie 32. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy znacz wzory na **prawdopodobieństwo warunkowe**?

a) **(3 pkt)** 5 kul białych i 6 kul czarnych wrzucamy losowo do dwóch ponumerowanych urn. Oblicz prawdopodobieństwo, że do pierwszej urny trafiły dokładnie 3 białe kule, jeśli wiadomo, że do drugiej urny trafiło 5 kul.

**Pytanie 33. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy znacz wzory na **prawdopodobieństwo całkowite**?

a) **(3 pkt)** Wśród wyrobów firmy I i II wyroby wadliwe stanowią odpowiednio 1% i 2%. Firma I dostarcza do hurtowni 3 razy więcej towaru niż firma II. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo zakupiona w tej hurtowni jedna sztuka towaru okaże się wadliwa.

**Pytanie 34. (Tier B, 3 pkt na 30%)**

Czy wiesz, jak i w jakich sytuacjach stosować **wzór Bayesa**?

a) **(3 pkt)** Wiadomo, że $1\%$ mężczyzn choruje na chorobę $X$, oraz $2\%$ kobiet choruje na chorobę $X$. Z grupy 200 mężczyzn i 300 kobiet wybieramy losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana osoba jest kobietą, jeśli wiadomo, że choruje na chorobę $X$.

**Pytanie 35. (Tier A, 3 pkt na 30%)**

Czy znasz **schemat Bernoulliego** i wiesz kiedy go stosować?

a) **(3 pkt)** Strzelec trafia w cel z prawdopodobieństwem $90\%$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że strzelec trafi w cel przynajmniej 5 razy w 6 strzałach. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

**Pytanie 36. (Tier A, 2 pkt na 50%)**

Czy umiesz obliczać **granice funkcji w punkcie** (w tym jednostronne)?

a) **(2 pkt)** Oblicz granicę: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{5x^2 + 3x}{x^2}$.

b) **(2 pkt)** Oblicz granicę: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x^2 - 1}$.

**Pytanie 37. (Tier A, 3 pkt na 30%)**

Czy wiesz co to jest i do czego można wykorzystać **własność Darboux**?

a) **(2 pkt)** Wykaż, że wielomian $W(x) = 2x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 22x - 8$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $(0, 1)$.

b) **(3 pkt)** Wykaż, że równanie $\sqrt{x+1} + x = x^2 + 1$ ma w przedziale $(-1, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

**Pytanie 38. (Tier S, 3 pkt na 80%)**

Czy znasz zasady obliczania **pochodnych**? W tym pochodnej funkcji wymiernej i **pochodnej funkcji złożonej**?

a) **(łatwe)** $(4x^5 - x^3)'$

b) **(łatwe)** $\left(\frac{5}{x}\right)'$

c) **(łatwe)** $\left(5\sqrt[3]{x}\right)'$

d) **(1 pkt)** $\left(\frac{x^3 - 2x}{7x + 3}\right)'$

e) **(2 pkt)** $\left(\sqrt{3x^7 - x^5}\right)'$

**Pytanie 39. (Tier S, 3 pkt na 50%)**

Czy wiesz jaka jest interpretacja geometryczna pochodnej i jaki jest jej związek ze **styczną do wykresu funkcji**?

a) **(łatwe)** Oblicz współczynnik kierunkowy prostej stycznej do paraboli $y = x^2$ w punkcie $P = (3, 9)$

b) **(2 pkt)** Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x + 7$ w punkcie $P$ o pierwszej współrzędnej $x = 1$.

c) **(3 pkt)** Wyznacz punkt przecięcia stycznych do wykresu funkcji $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ w jej miejscach zerowych.

**Pytanie 40. (Tier S, 3 pkt na 50%)**

Czy wiesz jak badać **monotoniczność funkcji** i znajdować **ekstrema lokalne**?

a) **(łatwe)** Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 6x$ jest monotoniczna w przedziale $(-3, -2)$.

b) **(3 pkt)** Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ jest monotoniczna w przedziale $(3, \infty)$.

c) **(3 pkt)** Zbadaj liczbę ekstremów lokalnych funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx$ w zależności od parametru $m$.

**Pytanie 41. (Tier S+, 6 pkt na 100%)**

Czy umiesz rozwiązywać **zadania optymalizacyjne**?

a) **(2 pkt)** Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne o powierzchni całkowitej równej 60. Wykaż, że objętość tych graniastosłupów w zależności od długości krawędzi podstawy $a$ jest równa $V(a) = 15a - \frac{a^3}{2}$ dla $a \in (0, \sqrt{30})$.

b) **(4 pkt)** Wyznacz największą z możliwych objętości graniastosłupa, którego objętość w zależności od długości krawędzi podstawy $a$ dana jest wzorem $V(a) = 15a - \frac{a^3}{2}$ dla $a \in (0, \sqrt{30})$.