

Matura rozszerzona 2026 - marzec - próbna z Matematyką

Zadanie 1. (2 pkt)

W pewnym jeziorze po awarii przemysłowej pojawiła się substancja chemiczna. Ilość tej substancji w jeziorze zmniejsza się zgodnie z zależnością

$$N(t) = a \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{12}},$$

gdzie:

t – to czas wyrażony w dniach,

$N(t)$ – to ilość substancji wyrażona w kilogramach,

a – to pewna stała dodatnia.

Po 24 dniach od awarii w jeziorze znajdowało się 20 kg tej substancji.

Oblicz, po ilu dniach od chwili awarii ilość tej substancji spadnie poniżej 1 kg.

W obliczeniach możesz skorzystać z przybliżenia:

$$\log_2 10 \approx 3,32.$$

Wynik podaj z dokładnością do 1 dnia. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (3 pkt)

Dane są liczby

$$a = \log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt{5} \quad \text{oraz} \quad b = \log_{25} 27$$

Wykaż, że: $\frac{a}{b} = 3^{\log_{\sqrt{3}}(\log_{27} 125)}$.

Zadanie 3. (3 pkt)

W pewnej firmie budowlanej każdy pracownik umie obsługiwać koparkę lub wywrotkę. Pracownicy umiejący obsługiwać koparkę stanowią 60% tej grupy, a pracownicy umiejący obsługiwać wywrotkę stanowią 70% tej grupy.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana pracownik z tej firmy umie obsługiwać koparkę jeżeli umie obsługiwać wywrotkę. Zapisz obliczenia.

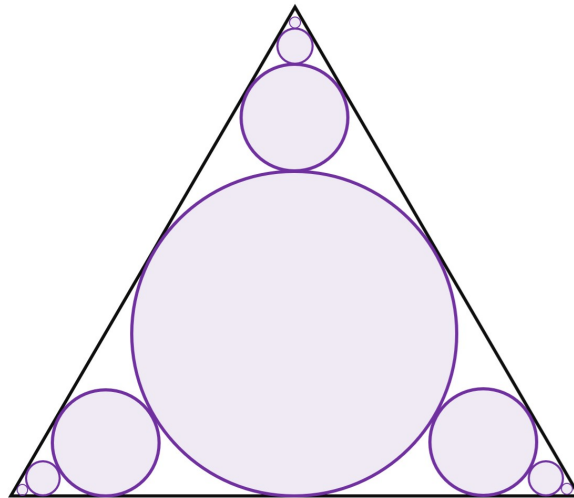
Zadanie 4. (4 pkt)

W równoległoboku $ABCD$ punkt E należy do boku AB , zaś punkt F należy do boku AD . Ponadto zachodzą stosunki: $|AE| : |EB| = 1 : 2$ oraz $|AF| : |FD| = 1 : 3$. Przekątna AC przecina odcinek EF w punkcie P .

Wykaż, że $|AP| : |PC| = 1 : 6$.

Zadanie 5. (5 pkt)

W trójkąt równoboczny o boku długości 1 wpisano koło, a następnie wpisano trzy koła styczne do danego koła i boków danego trójkąta. Czynność tę powtórzono nieskończenie wiele razy (zobacz rysunek).



Oblicz sumę pól wszystkich wpisanych kół. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (4 pkt)

Rozwiąż równanie

$$\sin^2 x \cos x + \frac{\sqrt{6} \sin^2 x}{2} = \sin^3 x$$

w przedziale $[0, 2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (5 pkt)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = mx^2 + 2m^2x + (2m^2 + m - 2)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 różnych znaków, spełniające dodatkowo warunek

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (4 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i przyprostokątnych długości: $|AC| = 2$, $|BC| = 1$. Z wierzchołka C poprowadzono dwusieczną, która przecięła bok AB w punkcie D .

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ACD . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (5 pkt)

Dane są okręgi:

- $\mathcal{O}_1 : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

- $\mathcal{O}_2 : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5$

Wyznacz równania stycznych do okręgu $\mathcal{O}_1$ przechodzących przez środek okręgu $\mathcal{O}_2$. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (5 pkt)

Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od krawędzi bocznej jest równa d . Kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa jest ostry i ma miarę 2α .

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (4 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$ oraz prosta $k : 9x + 4y - 28 = 0$.

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji f , które są jednocześnie prostopadłe do prostej k . Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Rozważmy wszystkie stożki, w których suma pola przekroju osiowego i pola podstawy jest równa 9.

Zadanie 12.1. (2 pkt)

Wykaż, że objętość stożka w zależności od długości promienia podstawy r jest równa

$$V(r) = \pi r \left(3 - \frac{\pi r^2}{3} \right)$$

Zadanie 12.2. (4 pkt)

Objętość stożka w zależności od długości promienia podstawy r jest równa

$$V(r) = \pi r \left(3 - \frac{\pi r^2}{3} \right)$$

dla $r \in \left(0, \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi} \right)$.

Wyznacz długość promienia podstawy r stożka, dla którego jego objętość jest największa. Oblicz tę objętość. Zapisz obliczenia.