

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom rozszerzony

Wymagania egzaminacyjne od roku szkolnego 2024/2025:

<https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20240001019/O/D20241019.pdf>

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n - 1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.9) stosuje związki logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi; I.R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne rozwiązanie: $a^b = \frac{2}{3}$

2 pkt – obliczenie wartości obu liczb a oraz b

1 pkt – obliczenie wartości jednej z liczb a lub b

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Po zastosowaniu wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz podstawieniu wartości logarytmów otrzymujemy:

$$a = \frac{\log_2 5}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 25} = \frac{\log_2 5}{3} \cdot \frac{1}{\log_2 25}$$

Po zastosowaniu wzoru na logarytm potęgi oraz po wykonaniu skracania ułamków otrzymujemy:

$$a = \frac{\log_2 5}{3} \cdot \frac{1}{\log_2 5^2} = \frac{\log_2 5}{3} \cdot \frac{1}{2 \log_2 5} = \frac{1}{6}$$

Po zastosowaniu wzoru na logarytm potęgi otrzymujemy:

$$b = (\log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot \log_6 2^{-1} = (\log_6 3)^2 + \log_6 2 \cdot (-\log_6 2)$$

Po zapisaniu wyrażenia w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb i po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy: $b = (\log_6 3)^2 - (\log_6 2)^2 = (\log_6 3 + \log_6 2) \cdot (\log_6 3 - \log_6 2)$

Po zastosowaniu wzorów na logarytm iloczynu i ilorazu oraz podstawieniu wartości logarytmu otrzymujemy: $b = \log_6 6 \cdot \log_6 \frac{3}{2} = \log_6 \frac{3}{2}$

Z definicji potęgi o wykładniku ujemnym wynika, że: $a^b = \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_6 \frac{3}{2}} = 6^{-\log_6 \frac{3}{2}}$

Po zastosowaniu wzoru na logarytm potęgi otrzymujemy: $a^b = 6^{-\log_6 \frac{3}{2}} = 6^{\log_6 \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}} = 6^{\log_6 \frac{2}{3}}$
Z definicji logarytmu wynika, że: $a^b = 6^{\log_6 \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

Zadanie 2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów i tabel.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarymiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – pełne rozwiązanie: wyznaczenie współczynnika $a = 202$ oraz czasu, po którym temperatura chleba spadnie poniżej 30°C : $t = 5$ minut

1 pkt – wyznaczenie współczynnika $a = 202$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) $220 = a(1,76)^0 + 18$

$a = 202$

$F(t) = 202 \cdot (1,76)^{-t} + 18$

b) $F(1) = 202 \cdot (1,76)^{-1} + 18 \approx 132,77$

$F(2) = 202 \cdot (1,76)^{-2} + 18 \approx 83,21$

$F(3) = 202 \cdot (1,76)^{-3} + 18 \approx 55,05$

$F(4) = 202 \cdot (1,76)^{-4} + 18 \approx 39,05$

$F(5) = 202 \cdot (1,76)^{-5} + 18 \approx 29,96$

Odpowiedź: Po 5 minutach.

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne; VIII.R2) stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Zasady oceniania

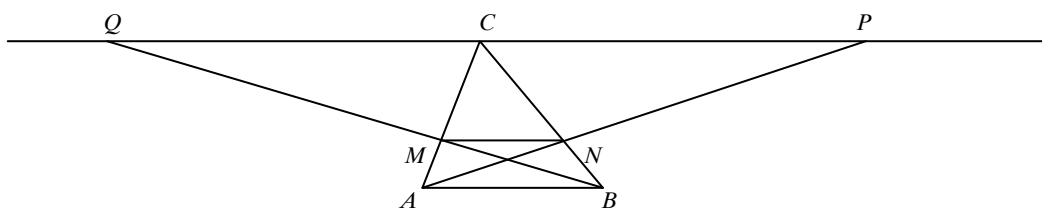
3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania i podanie długości odcinka $|PQ| = 4a$

2 pkt – zauważenie i wykorzystanie podobieństwa odpowiednich trójkątów do obliczenia długości odcinka $|CP|$ albo odcinka $|CQ|$

1 pkt – zauważenie podobieństwa trójkątów CMN i ABC oraz wyznaczenie skali tego podobieństwa albo zapisanie zależności $|MN| = \frac{2}{3}|AB|$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie



Prowadzimy prostą MN . Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że prosta MN jest równoległa do boku AB trójkąta ABC , zatem trójkąt CMN jest podobny do trójkąta ABC w skali $\frac{2}{3}$, więc

$$|MN| = \frac{2}{3}|AB|.$$

Trójkąty AMN i ACP są podobne (na podstawie cechy bkb podobieństwa trójkątów).

Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy:

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|MN|}{|CP|}$$

$$\frac{\frac{1}{3}|AC|}{|AC|} = \frac{\frac{2}{3}|AB|}{|CP|}$$

Po przekształceniu otrzymujemy: $|CP| = 2|AB| = 2a$

Trójkąty BMN i BCQ są podobne (na podstawie cechy bkb podobieństwa trójkątów).

Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy:

$$\frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|MN|}{|CQ|}$$

$$\frac{\frac{1}{3}|BC|}{|BC|} = \frac{\frac{2}{3}|AB|}{|CQ|}$$

Po przekształceniu otrzymujemy $|CQ| = 2|AB| = 2a$

Stąd: $|PQ| = |CP| + |CQ| = 4a$

Zadanie 4. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R1) rozwiązuje równania wielomianowe $W(x) = 0$ oraz nierówności wielomianowe $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyznaczania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania; III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in [-3, -2] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$

4 pkt – zapisanie dwóch przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) albo dwóch przypadków: $x < 0$ i $x \geq 0$ oraz zapisanie danej nierówności w każdym z tych przedziałów (przypadków) bez użycia symbolu wartości bezwzględnej oraz rozwiązanie obu otrzymanych nierówności bez uwzględnienia przyjętych założeń

3 pkt – zapisanie dwóch przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) albo dwóch przypadków: $x < 0$ i $x \geq 0$ oraz zapisanie danej nierówności w każdym z tych przedziałów (przypadków) bez użycia symbolu wartości bezwzględnej oraz rozwiązanie jednej z tych nierówności bez uwzględnienia przyjętego założenia

2 pkt – zapisanie dwóch przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) albo dwóch przypadków: $x < 0$ i $x \geq 0$ oraz zapisanie danej nierówności w każdym z tych przedziałów (przypadków) bez użycia symbolu wartości bezwzględnej oraz zapisanie przynajmniej jednej z tych nierówności w postaci iloczynowej

1 pkt – zapisanie dwóch przedziałów: $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) albo dwóch przypadków: $x \geq 0$ i $x < 0$ oraz zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów (przypadków) bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci $(-\infty, 0)$ i $[0, +\infty)$.

Rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 1.

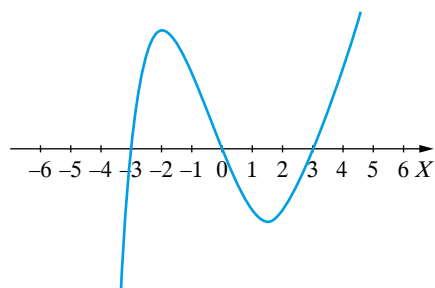
Dla $x \in (-\infty, 0)$ nierówność przyjmuje postać: $x^3 + 5x^2 + 6x \geq 0$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $x(x^2 + 5x + 6) \geq 0$

Obliczamy pierwiastki wielomianu: $x = 0$ lub $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$$x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

Z przybliżonego wykresu funkcji wielomianowej, z uwzględnieniem założenia, że $x \in (-\infty, 0)$, odczytujemy rozwiązanie nierówności:



$$x \in [-3, -2]$$

Przypadek 2.

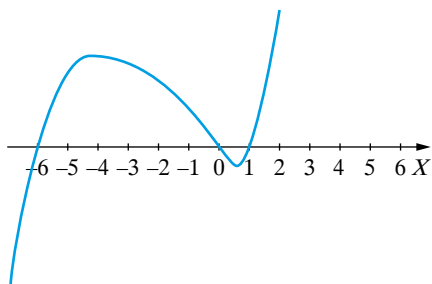
Dla $x \in [0, +\infty)$ nierówność przyjmuje postać: $x^3 + 5x^2 - 6x \geq 0$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias: $x(x^2 + 5x - 6) \geq 0$

Obliczamy pierwiastki wielomianu: $x = 0$ lub $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6, \quad x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$$

Z przybliżonego wykresu funkcji wielomianowej, z uwzględnieniem założenia, że $x \in [0, +\infty)$, odczytujemy rozwiązanie nierówności:



$$x \in \{0\} \cup [1, +\infty)$$

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności $x^3 + 5x^2 + 6|x| \geq 0$ są wszystkie liczby ze zbioru $[-3, -2] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$.

Zadanie 5. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_1 = 4, q = \frac{1}{2}$

3 pkt – zapisanie warunku zbieżności obu szeregów i doprowadzenie rozwiązania układu równań do zapisania równania z jedną niewiadomą

2 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi:
$$\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ \frac{a_1^2}{1 - q^2} = 8 \frac{a_1 q}{1 - q^2} \end{cases}$$

1 pkt – zapisanie sumy kwadratów wyrazów ciągu wzorem $\frac{a_1^2}{1 - q^2}$ albo zapisanie sumy wyrazów ciągu o numerach parzystych wzorem $\frac{a_1 q}{1 - q^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania:

$$a_3 = 1$$

$$a_1 q^2 = 1$$

oraz:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = a_1^2 + a_1^2 q^2 + a_1^2 q^4 + \dots = \frac{a_1^2}{1 - q^2}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots = a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots = \frac{a_1 q}{1 - q^2}$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ \frac{a_1^2}{1 - q^2} = 8 \frac{a_1 q}{1 - q^2} \end{cases}$$

Po uwzględnieniu warunku zbieżności szeregu geometrycznego: $|q| < 1$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ a_1^2 = 8a_1 q \end{cases}$$

Stąd:

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 1 \\ a_1(a_1 - 8q) = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = 8q \quad a_1 \neq 0$$

$$8q^3 = 1$$

Rozwiązaniem jest para liczb: $q = \frac{1}{2} \quad a_1 = 4$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie: $x \in \left\{ -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\sin x + \cos x = 0$ w podanym przedziale lub zbiorze liczb rzeczywistych albo zapisanie, że równanie $\sin x + \cos x = 3$ nie ma rozwiązania, i podanie co najmniej jednego rozwiązania równania $\sin x + \cos x = 0$

2 pkt – doprowadzenie równania do postaci iloczynowej

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus podwojonego kąta i na jedynekę trygonometryczną

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i na jedynekę trygonometryczną oraz przekształcamy równanie: $\sin 2x + 1 = 3\sin x + 3\cos x$

do postaci: $2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin x - 3\cos x = 0$

Przekształcamy równanie równoważnie: stosujemy wzór skróconego mnożenia i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 3) = 0$$

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ lub } \sin x + \cos x = 3$$

Zauważamy, że drugie równanie alternatywy nie ma rozwiązania, natomiast pierwsze zapisujemy w postaci: $\sin x = -\cos x$ i przy założeniu, że $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, dzielimy strony równania przez $\cos x$ i otrzymujemy $\tan x = -1$.

Rozwiązaniem tego równania w zbiorze $\mathbb{R}$ są liczby postaci $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-2\pi, 2\pi]$ są liczby $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne (m.in. stosuje [...] twierdzenie cosinusów [...]; VII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – pełne rozwiązanie: obliczenie pola trapezu $P = 48\sqrt{5}$ i wyznaczenie wartości cosinusów kątów

ostrych trapezu $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

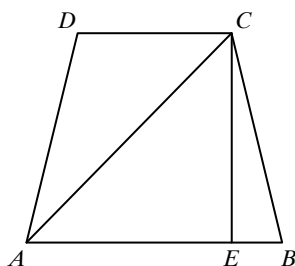
3 pkt – obliczenie pola trapezu albo wyznaczenie wartości cosinusów kątów ostrych trapezu

2 pkt – obliczenie długości ramion trapezu i jego wysokości $h = 4\sqrt{5}$ cm

1 pkt – wykorzystanie własności czworokątów wpisanych i opisanych na okręgu i obliczenie długości ramion trapezu $c = 12$ cm

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia:

a – długość dłuższej podstawy trapezu

b – długość krótszej podstawy trapezu

c – długości ramion trapezu

d – długość przekątnej trapezu

h – długość wysokości trapezu

Z warunków zadania wynika, że:

– trapez jest równoramienny, ponieważ można na nim opisać okrąg;

– suma długości podstaw trapezu jest równa sumie długości jego ramion, ponieważ można w niego wpisać okrąg.

Na podstawie powyższych informacji oraz wiedząc, że obwód trapezu jest równy 48 cm, zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 2c \\ a + b + 2c = 48 \end{cases}$$

z którego otrzymujemy, że: $a + b = 24$ oraz $c = 12$ cm.

Ponadto wyznaczamy długości odcinków:

$$y = |EB| = \frac{a-b}{2} \text{ oraz } x = |AE| = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-a+b}{2} = \frac{a+b}{2} = 12$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AEC i obliczamy długość wysokości trapezu:

$$h^2 + x^2 = d^2$$

$$h^2 + 12^2 = (4\sqrt{14})^2$$

$$h^2 = 80$$

$$h = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

Obliczamy pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$P = \frac{24 \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 48\sqrt{5} [\text{cm}^2]$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta EBC i obliczamy długość odcinka $y = |EB|$:

$$h^2 + y^2 = c^2$$

$$(4\sqrt{5})^2 + y^2 = 12^2$$

$$y^2 = 64$$

$$y = 8$$

Wyznaczamy długość dłuższej podstawy:

$$a = x + y$$

$$a = 12 + 8 = 20$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC i obliczamy wartość α cosinusów kątów ostrych trapezu: kąta ABC oraz kąta DAB .

$$d^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \alpha$$

$$(4\sqrt{14})^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$$

$$-320 = -480 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Stąd } \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawne rozwiązanie: jest 39 liczb szukanej postaci

3 pkt – poprawne wskazanie czterech przypadków i zapisanie liczby liczb rozważanych w trzech spośród z tych przypadków

2 pkt – poprawne wskazanie czterech przypadków i zapisanie liczby liczb rozważanych w dwóch spośród z tych przypadków

1 pkt – poprawne wskazanie czterech przypadków albo poprawne wskazanie trzech przypadków i zapisanie liczby liczb rozważanych w jednym z tych przypadków

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Liczbę 36 można zapisać w postaci iloczynów liczb jednocyfrowych na 6 sposobów:

$$36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Wynika z tego, że szukana liczba pięciocyfrowa podzielna przez 4 jest zapisana za pomocą jednej z czterech poniższych kombinacji cyfr:

1, 1, 1, 6, 6 – przy czym ze względu na podzielność przez 4 dwie ostatnie cyfry tej liczby to 16;

1, 1, 2, 2, 9 – przy czym ze względu na podzielność przez 4 dwie ostatnie cyfry tej liczby to 12;

1, 1, 2, 3, 6 – przy czym ze względu na podzielność przez 4 dwie ostatnie cyfry tej liczby to 12 albo 16, albo 32, albo 36;

1, 2, 2, 3, 3 – przy czym ze względu na podzielność przez 4 dwie ostatnie cyfry tej liczby to 12 albo 32. Zauważamy, że z kombinacji cyfr 1, 1, 1, 4, 9 oraz 1, 1, 3, 3, 4 (których iloczyn też jest równy 36) nie można utworzyć liczby podzielnej przez 4. Rozpatrujemy więc cztery przypadki.

Przypadek 1.

Z cyfr 1, 1, 1, 6, 6 można utworzyć 3 liczby pięciocyfrowe, które są podzielne przez 4:

61116

16116

11616

Przypadek 2.

Z cyfr 1, 1, 2, 2, 9 można utworzyć 9 ($P_3 + C_3^1 = 6 + 3 = 9$) liczb pięciocyfrowych, które są podzielne przez 4:

29112 92112

21912 91212

12912 19212

21192

12192

11292

Przypadek 3.

Z cyfr 1, 1, 2, 3, 6 można utworzyć 18 ($P_3 + P_3 + C_3^1 + C_3^1 = 6 + 6 + 3 + 3 = 18$) liczb pięciocyfrowych, które są podzielne przez 4:

36112 63112

31612 61312

13612 16312

23116 32116

21316 31216

12316 13216

61132

16132

11632

21136

12136

11236

Przypadek 4.

Z cyfr 1, 2, 2, 3, 3 można utworzyć 9 ($C_3^1 + P_3 = 3 + 6 = 9$) liczb pięciocyfrowych, które są podzielne przez 4:

23312

32312

33212

23132 32132

21332 31232

12332 13232

Odpowiedź: Jest 39 liczb pięciocyfrowych szukanej postaci.

Zadanie 9. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie [...]; IX.4) posługuje się równaniem okręgu; IX.R1) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu.

Zasady oceniania

6 pkt – poprawne wyznaczenie równania okręgu, współrzędnych punktu $C = (-4, 11)$ oraz wykazanie współliniowości punktów

5 pkt – poprawne wyznaczenie równania okręgu, współrzędnych punktu $C = (-4, 11)$, współrzędnych środka ciężkości trójkąta $P = \left(-\frac{8}{3}, 5\right)$ oraz wskazanie punktu A jako punktu przecięcia wysokości trójkąta ABC

4 pkt – poprawne wyznaczenie równania okręgu i współrzędnych punktu $C = (-4, 11)$

3 pkt – poprawne wyznaczenie równania okręgu $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25$

2 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S = (-4, 6)$

1 pkt – zapisanie równania lub układu równań pozwalającego wyznaczyć współrzędne środka okręgu

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) Wiemy, że środek okręgu S leży na prostej $x + y - 2 = 0$, więc możemy jego współrzędne zapisać następująco $S = (x, -x + 2)$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów A, B, S do warunku $|AS| = |BS|$ otrzymujemy równanie:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (-x+2-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (-x+2-1)^2}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy zależność:

$$(x)^2 + (-x-1)^2 = (x+4)^2 + (-x+1)^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x + 1$$

$$-4x = 16$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } S = (-4, 6)$$

Obliczamy promień okręgu $r = |AS|$:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (6-3)^2} = 5$$

Równanie okręgu ma postać: $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25$

b) Wyznaczamy równanie prostej BS : $x = -4$.

Zauważamy, że prosta BS zawiera bok BC trójkąta, który jest średnicą okręgu, ponieważ z warunków zadania trójkąt ABC jest prostokątny i kąt BAC ma miarę 90° .

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = -4 \\ (x+4)^2 + (y-6)^2 = 25 \end{cases}$$

i wyznaczamy współrzędne drugiego punktu wspólnego prostej BS i okręgu, czyli wierzchołek C trójkąta ABC :

$$(-4+4)^2 + (y-6)^2 = 25$$

$$(y-6)^2 = 25$$

$$y = 1 \text{ lub } y = 11$$

Rozwiązaniem układu równań są dwie pary rozwiązań – współrzędne dwóch punktów przecięcia

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 11 \end{cases}$$

Zauważamy, że pierwsza para rozwiązań to współrzędne wierzchołka B , zatem wierzchołek C ma współrzędne $(-4, 11)$.

Współrzędne punktu C można wyznaczyć również na przykład ze wzorów na współrzędne środka odcinka.

c) Trójkąt ABC jest prostokątny, więc punktem przecięcia jego wysokości jest wierzchołek kąta prostego, czyli punkt $A = (0, 3)$.

Obliczamy współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC :

$$P = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

$$P = \left(\frac{0 - 4 - 4}{3}, \frac{3 + 1 + 11}{3} \right)$$

$$P = \left(-\frac{8}{3}, 5 \right)$$

Wyznaczamy równanie prostej AS :

$$(y - 3)(-4 - 0) - (6 - 3)(x - 0) = 0$$

$$-4y + 12 - 3x = 0$$

$$3x + 4y - 12 = 0$$

Następnie sprawdzamy, czy punkt P spełnia równanie tej prostej:

$$3 \cdot \left(-\frac{8}{3} \right) + 4 \cdot 5 - 12 = 0$$

Równość jest prawdziwa, co dowodzi, że punkty A , S , P są współliniowe – leżą na jednej prostej.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne, które dadzą się sprowadzić do równania lub nierówności liniowej lub kwadratowej; III.R5) analizuje [...] równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają określone znaki bądź należą do określonego przedziału, wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawne wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ oraz zbioru rozwiązań alternatywy warunków dotyczących znaków pierwiastków równania: $m \in (-2, 0) \cup (0, 4)$

4 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ oraz zapisanie obu przypadków: warunku, przy którym równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, oraz warunków, które muszą być spełnione, aby równanie miało dwa rozwiązania dodatnie oraz poprawne rozwiązanie obu przypadków: $m \in (-\infty, -4) \cup (-2; 0) \cup (0, +\infty)$

3 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności: $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-2, 4; 4)$, oraz zapisanie obu przypadków: warunku, przy którym równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, oraz warunków, które muszą być spełnione, aby równanie miało dwa rozwiązania dodatnie, oraz poprawne rozwiązanie jednego z tych przypadków $m \in (-2; 0)$ albo $m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in (-2, 4; 4)$, oraz zapisanie warunku, przy którym równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, oraz warunków, które muszą być spełnione, aby równanie miało dwa rozwiązania dodatnie

1 pkt – zapisanie warunku, aby równanie kwadratowe miało dwa różne miejsca zerowe, oraz warunku, przy którym równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, albo warunków, które muszą być spełnione, aby równanie miało dwa rozwiązania dodatnie

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

Wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = (-3(m+4))^2 - 4m(6m+12)$$

$$\Delta = 9(m^2 + 8m + 16) - 24m^2 - 48m$$

$$\Delta = -15m^2 + 24m + 144$$

Rozwiązujemy nierówność: $\Delta > 0$

$$\text{czyli: } -15m^2 + 24m + 144 > 0$$

$$-5m^2 + 8m + 48 > 0$$

Obliczamy wyróżnik i miejsca zerowe powyższego trójmianu:

$$\Delta_m = 8^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 48 = 1024$$

$$m_1 = \frac{-8 - 32}{-10} = 4, \quad m_2 = \frac{-8 + 32}{-10} = -2,4$$

Rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-2, 4; 4)$.

Aby spełniony był warunek zadania dotyczący znaków rozwiązań równania, należy rozważyć alternatywę dwóch przypadków:

równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, jeżeli zachodzi zależność: $x_1 \cdot x_2 < 0$

równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, jeżeli jest spełniony układ warunków:
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$$

Przypadek 1.

Korzystamy ze wzorów Viete'a: $\frac{c}{a} < 0$

Podstawiamy współczynniki danego równania, przekształcamy równoważnie i otrzymujemy:

$$\frac{6m+12}{m} < 0$$

$$6(m+2) \cdot m < 0$$

$$m \in (-2; 0)$$

Przypadek 2.

Korzystamy ze wzorów Viete'a:
$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \end{cases}$$

Podstawiamy współczynniki danego równania, przekształcamy równoważnie i otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{6m+12}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3(m+4)}{m} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6(m+2) \cdot m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(m+4) \cdot m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

Częścią wspólną rozwiązań obu nierówności jest suma przedziałów $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Na podstawie twierdzenia o odcinku łączącym dwa boki trójkąta BCD wnioskujemy, że $|MN| = \frac{1}{2}|BD|$ czyli, że $x = \frac{1}{2}d$.

Otrzymujemy układ warunków:
$$\begin{cases} d = 2x \\ d = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Wynika z nich, że: $a = x\sqrt{2}$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta MCS , otrzymujemy:

$$x^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{6})^2$$

Przekształcamy równanie równoważnie $x^2 + \frac{x^2}{2} = 6$
 $x^2 = 4$

Otrzymujemy $x = 2$

oraz $a = 2\sqrt{2}$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta OMS , otrzymujemy:

$$H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = x^2$$

Przekształcamy równanie równoważnie: $H^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2$
 $H^2 = 2$

i otrzymujemy $H = \sqrt{2}$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot x}{2}$$

$$P_c = (2\sqrt{2})^2 + 4 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2}{2} = 8 + 8\sqrt{2}$$

Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}a^2H$$

$$V = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

5 pkt – uzasadnienie, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=0$, oraz obliczenie wartości minimum funkcji $f_{\min}(0)=1$

4 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=0$

3 pkt – obliczenie drugiego miejsca zerowego pochodnej funkcji f : $x=0$

2 pkt – wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f oraz wykorzystanie warunku koniecznego ekstremum i zapisanie warunku $f'(-2) = 0$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Pochodną funkcji $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ jest funkcja $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

Funkcja f osiąga dla argumentu -2 maksimum równe 5 (wykorzystujemy warunek konieczny istnienia ekstremum), więc zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} f(-2) = 5 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy podane wartości i otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + 1 = 5 \\ 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) = 0 \\ -8a + 4b = 4 \\ 12a - 4b = 0 \end{cases}$$

Stąd $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$.

Otrzymujemy wzór funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ oraz wzór jej pochodnej $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f : $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -2$$

Badamy znak pochodnej:

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-2, 0)$$

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $[-2, 0]$ i rosnąca w przedziale $[0, \infty)$.

Stąd funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $x = 0$. Wtedy $f_{\min}(0) = 1$.