

Dziedzina wyrażenia wymiernego

W każdym wyrażeniu wymiernym należy zrobić założenie, że mianownik jest różny od zera.

W ten sposób dajemy sobie gwarancję, że nie wykonamy dzielenia przez 0 (które jak wiadomo w matematyce jest niewykonalne).

Robienie tych założeń jest inaczej zwane określaniem **dziedziny wyrażenia wymiernego**. Rozwiązanie **każdego** zadania dotyczącego wyrażeń wymiernych powinno się zacząć właśnie od określenia dziedziny.

Zobaczmy teraz w praktyce jak wyznacza się dziedzinę wyrażenia wymiernego:

Zadanie Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego.

1) $\frac{2x + 3}{5x - 15}$

Rozwiązanie:

Zapisujemy założenie, że mianownik jest różny od zera, czyli:

$$5x - 15 \neq 0$$

$$5x \neq 15$$

$$x \neq 3$$

Zatem z dziedziny musimy wykluczyć liczbę 3. Czyli dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem 3. Zapisujemy to tak: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

II sposób (inny sposób zapisu)

Jeżeli czujesz się niepewnie pisząc znak $\neq$, to możesz rozwiązanie zapisać w następujący sposób:

Sprawdzam kiedy mianownik wyrażenia wymiernego przyjmuje wartość zero:

$$5x - 15 = 0$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

Zatem dla $x = 3$ mianownik ułamka zeruje się, czyli dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem 3. Czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Uwaga Sposób zapisu ma tutaj drugorzędne znaczenie. Najważniejsze jest aby rozumieć, że **dziedziną wyrażenia wymiernego są wszystkie liczby rzeczywiste, za wyjątkiem tych które zerują mianownik.**

$$2) \frac{-5x^2 + 2x}{-2x - 3}$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy założenie, że mianownik jest różny od zera, czyli:

$$-2x - 3 \neq 0$$

$$-2x \neq 3$$

$$x \neq -\frac{3}{2}$$

Zatem z dziedziny musimy wykluczyć liczbę $-\frac{3}{2}$. Czyli dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem $-\frac{3}{2}$. Zapisujemy to tak: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$.

$$3) \frac{1}{(x-1)(x+3)}$$

Rozwiązanie:

Sprawdzamy kiedy mianownik jest równy zero:

$$(x-1)(x+3) = 0$$

Iloczyn dwóch nawiasów jest równy zero, jeżeli przynajmniej jeden z tych nawiasów jest równy zero, zatem powyższe równanie jest spełnione jeżeli:

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -3$$

Czyli $x = 1$ zeruje mianownik oraz $x = -3$ zeruje mianownik.

Zatem z dziedziny musimy wykluczyć dwie liczby – liczbę 1 oraz liczbę -3 .

Zatem: $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

Analogicznie postępujemy gdy w mianowniku mamy dany iloczyn większej liczby nawiasów, np:

$$4) \frac{1}{(x+2)(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

Rozwiązanie:

Sprawdzamy kiedy mianownik jest równy zero:

$$(x+2)(x-5)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Iloczyn kilku nawiasów jest równy zero, jeżeli przynajmniej jeden z nich jest równy zero, zatem powyższe równanie jest spełnione jeżeli:

$$\begin{array}{ccccc} x + 2 = 0 & \vee & x - 5 = 0 & \vee & x - \frac{1}{2} = 0 \\ x = -2 & \vee & x = 5 & \vee & x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Czyli $x = -2$ oraz $x = 5$ oraz $x = \frac{1}{2}$ zerują mianownik.

Zatem z dziedziny musimy wykluczyć trzy liczby: liczbę -2 , liczbę 5 oraz liczbę $\frac{1}{2}$.

Zatem: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{2}, 5\}$.

5) $\frac{3x + 6}{x^2 - x - 30}$

Rozwiązanie:

Sprawdzamy kiedy mianownik jest równy zero:

$$x^2 - x - 30 = 0$$

Mamy do rozwiązania równanie kwadratowe dane w postaci ogólnej. Policzmy zatem deltę:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121$$

Zatem $\sqrt{\Delta} = 11$.

Czyli rozwiązaniami powyższego równania kwadratowego są liczby:

$$x_1 = \frac{1 - 11}{2} = -5$$

oraz

$$x_2 = \frac{1 + 11}{2} = 6$$

Czyli $x = -5$ zeruje mianownik oraz $x = 6$ zeruje mianownik.

Zatem z dziedziny musimy wykluczyć liczbę -5 oraz liczbę 6 .

Zatem: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 6\}$.