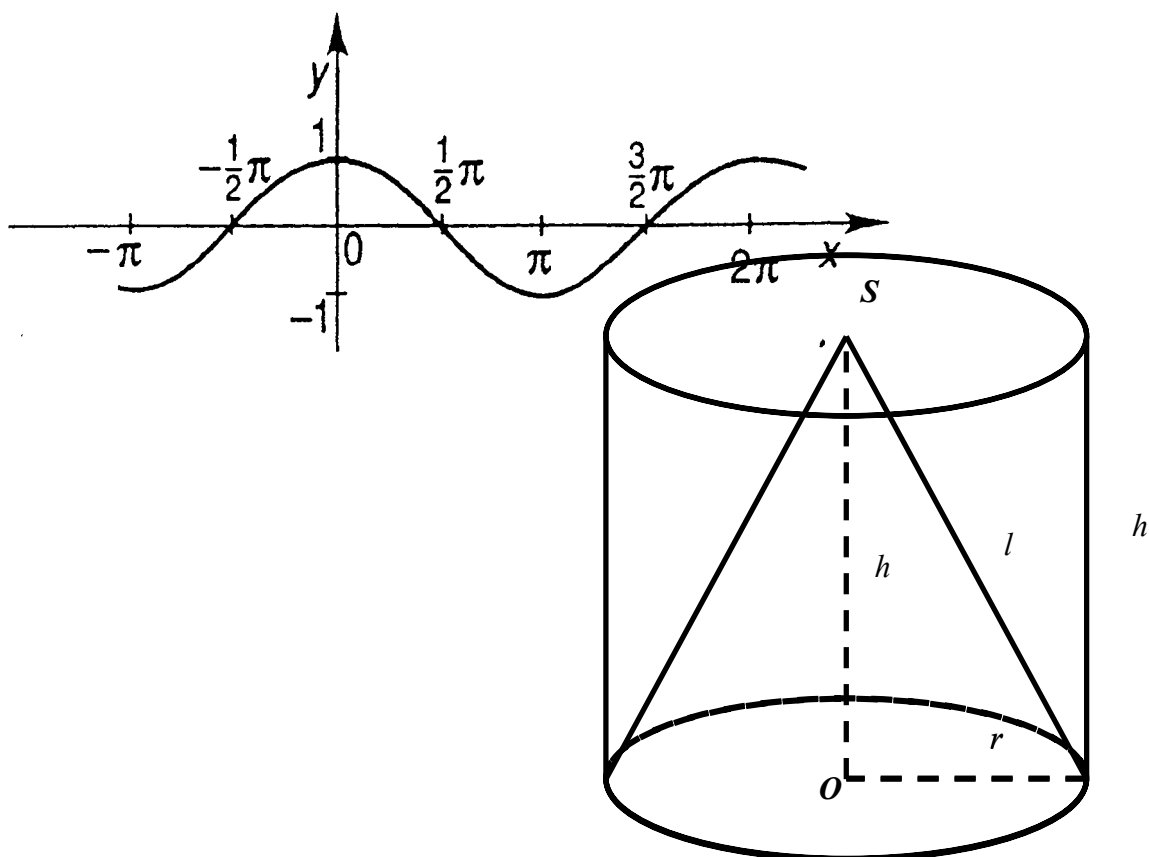


# ZESTAW WYBRANYCH WZORÓW MATEMATYCZNYCH

Materiały pomocnicze opracowane dla potrzeb egzaminu maturalnego  
i dopuszczone jako pomoce egzaminacyjne.



publikacja współfinansowana przez Europejski Fundusz Społeczny

Zestaw matematycznych wzorów został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki. Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.

Na zlecenie CKE zestaw wzorów matematycznych dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki dla niewidomych i słabo widzących przystosowały

mgr Bogumiła Golańska i mgr inż. Agnieszka Lato w Specjalnym Ośrodku Szkolno Wychowawczym dla Dzieci Niewidomych i Słabowidzących, Kraków ul. Tyniecka 7.

**|** To oznaczenie wskazuje materiał z zakresu rozszerzonego.

## SPIS TREŚCI

Wartość bezwzględna liczby .....	4
Potęgi i pierwiastki.....	4
Silnia. Symbol Newtona .....	5
Dwumian Newtona .....	6
Wzory skróconego mnożenia .....	6
Ciagi .....	7
Funkcja kwadratowa .....	8
Logarytmy.....	9
Pochodna funkcji.....	10
Geometria analityczna.....	11
Planimetria .....	14
Stereometria.....	18
Trygonometria .....	21
Kombinatoryka .....	27
Rachunek prawdopodobieństwa .....	27
Parametry danych statystycznych.....	29
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....	31

## WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \langle 0, \infty \rangle \\ -x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu  $x$  od punktu 0.

Dla dowolnych liczb  $x, y$

$$|x| \geq 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

Dla dowolnych liczb  $a$  oraz  $r \geq 0$ , mamy warunki równoważne:

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow (x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r)$$

## POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby  $a$  definiujemy  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Definiujemy:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^2 = a \cdot a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \text{ dla } n > 1 \end{cases} \quad \text{dla } a \neq 0$$

Pierwiastkiem  $\sqrt[n]{a}$  stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

Jeżeli  $a < 0$  oraz  $n$  jest liczbą nieparzystą to  $\sqrt[n]{a}$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Niech  $m, n$  są liczbami całkowitymi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad \text{dla } a > 0$$

### Działania na potęgach

Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeżeli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0, b \neq 0$ .

### SILNIA. SYMBOL NEWTONA

Silnią liczby całkowitej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1$$

Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 0$  zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

## Symbol Newtona

Dla liczb  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

## DWUMIAN NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb  $a, b$  mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

## WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  mamy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^k + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## CIĄGI

### Ciąg arytmetyczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

### Ciąg geometryczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

## Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy  $K$  złożymy na  $n$  lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi  $p\%$  w skali rocznej, to kapitał końcowy  $K_n$  wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## Granica ciągu - twierdzenia

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = h$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = g + h \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = g - h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = g \cdot h$$

Jeżeli  $(a_n)$ ,  $n \geq 1$  jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie  $|q| < 1$ , to ciąg sum jego początkowych wyrazów

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  ma granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

## FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } a, b, c \in R$$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy  $a > 0$ , do dołu, gdy  $a < 0$ .



$f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a \neq 0$ i $x \in R$		
wyróżnik	liczba miejsc zerowych	postać iloczynowa
$\Delta < 0$	nie ma miejsc zerowych	nie ma postaci iloczynowej
$\Delta = 0$	jedno miejsce zerowe $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	dwa różne miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

## Wzory Viète'a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

## LOGARYTMY

Niech  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Logarytmem  $\log_a c$  liczby  $c > 0$  przy podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $b$  potęgi, do której należy podnieść podstawę  $a$ , aby otrzymać liczbę  $c$ :

$$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb  $x > 0, y > 0$  oraz  $r$  zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

Jeżeli  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ , oraz  $c > 0$ , to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

## POCHODNA FUNKCJI

Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają pochodne dla  $x \in R$ , to:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in R$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{gdy } g(x) \neq 0.$$

Wzór funkcji $f$	Pochodna $f'(x)$ funkcji $f$	
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$x \in R$ i $c \in R$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$x \in R$ i $a \in R$ i $b \in R$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$x \in R$ i $a \in R$ i $b \in R$ i $c \in R$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$x \in R$ i $r \in N$ i $r > 1$ lub $x \in R \setminus \{0\}$ i $r \in C$ i $r < 0$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$	$x \in R$ i $x \neq 0$ i $a \in R$

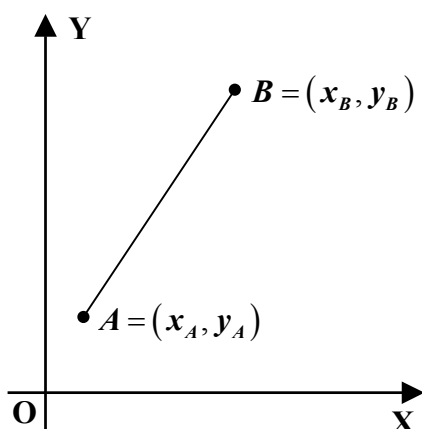
## Równanie stycznej

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$ , to równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  dane jest wzorem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

## GEOMETRIA ANALITYCZNA

### Odcinek



Długość odcinka o końcach w punktach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Środek  $M = (x_0, y_0)$  odcinka  $AB$

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

### Wektor

Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ , który przesuwa punkt  $A$  na punkt  $B$ :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są wektorami, zaś  $a$  jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

### Prosta

Równanie ogólne:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie  $A^2 + B^2 \neq 0$  (tj. współczynniki  $A, B$  nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli  $A = 0$ , prosta jest równoległa do osi  $Ox$ .

Jeżeli  $B = 0$ , prosta jest równoległa do osi  $Oy$ .

Jeżeli  $C = 0$ , to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Równanie kierunkowe prostej  $y = ax + b$ , gdzie  $a, b \in R$ .  
Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha \quad \alpha\text{-kąt nachylenia prostej do osi } Ox, \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Współczynnik  $b$  wyznacza na osi  $Oy$  punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$A = (x_A, y_A) \quad \text{i} \quad B = (x_B, y_B):$$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

### Prosta i punkt

Odległość  $d$  punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej o równaniu

$Ax + By + C = 0$ , jest wyrażona wzorem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### Para prostych – wzajemne położenie prostych

	równanie kierunkowe prostych $l_1 : y = a_1x + b_1,$ $l_2 : y = a_2x + b_2$	równanie ogólne prostych $l_1 : A_1x + B_1x + C_1 = 0,$ $l_2 : A_2x + B_2x + C_2 = 0$
warunek równoległości prostych	$a_1 = a_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$
warunek prostokątności prostych	$1 + a_1a_2 = 0$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
$\varphi$ - kąt między prostymi $l_1$ i $l_2$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ a_2 - a_1 }{ 1 + a_1a_2 }$ dla $1 + a_1a_2 \neq 0$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ A_1B_2 - A_2B_1 }{ A_1A_2 + B_1B_2 }$ dla $A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0$

## Trójkąt

Pole trójkąta  $ABC$ , gdzie  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ ,  $C = (x_C, y_C)$  dane jest wzorem

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|.$$

Środek ciężkości  $S = (x_S, y_S)$  trójkąta, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

## PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

Punkt  $A' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $A = (x, y)$  w symetrii względem początku układu współrzędnych, gdy

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$

Punkt  $A' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $A = (x, y)$  w symetrii względem osi  $OX$ , gdy

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Punkt  $A' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $A = (x, y)$  w symetrii względem osi  $OY$ , gdy

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Punkt  $A' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $A = (x, y)$  w translacji (przesunięciu równoległym) o wektor  $u = [a, b]$ , gdy

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Punkt  $A' = (x', y')$  jest obrazem punktu  $A = (x, y)$  w jednokładności o środku w punkcie  $O = (0, 0)$  i skali  $s$  ( $s \neq 0$ ), gdy

$$x' = sx, \quad y' = sy.$$

Równanie okręgu o środku w punkcie  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$ :

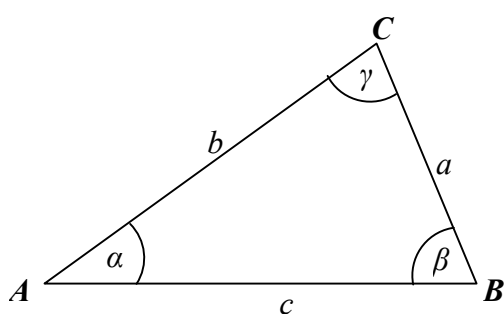
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ,

gdzie  $r^2 = a^2 + b^2 - c$  i  $a^2 + b^2 - c > 0$ .

## PLANIMETRIA

Oznaczenia



$a, b, c$  – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków  $A, B, C$ ;

$2p = a + b + c$  – obwód trójkąta;

$\alpha, \beta, \gamma$  – miary kątów przy wierzchołkach  $A, B, C$ ;

$h_a, h_b, h_c$  – wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołków  $A, B, C$ ;

$R$  – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie

$r$  – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

**Wzory na pole trójkąta**

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$P_{\Delta ABC} = rp$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{wzór Herona})$$

### Twierdzenie sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

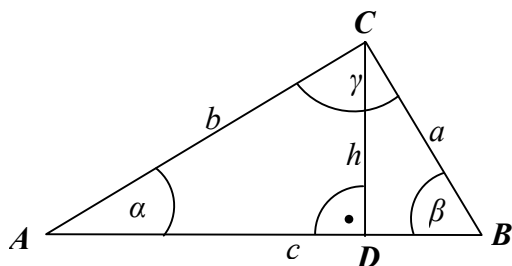
### Twierdzenie cosinusów:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

### Twierdzenie Pitagorasa



Jeżeli miara kąta  $\gamma = 90^\circ$ , to:

$a^2 + b^2 = c^2$  – twierdzenie Pitagorasa

### Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Jeżeli miara kąta  $\gamma = 90^\circ$ , to:

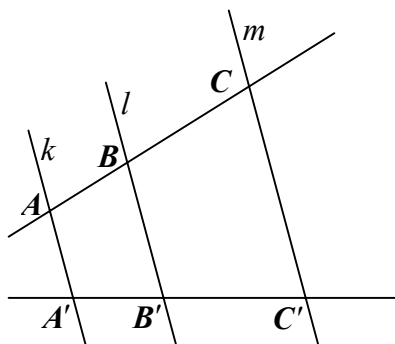
$$h^2 = pq \text{ gdzie } p = |AD|, q = |DB|$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$R = \frac{1}{2}c$$

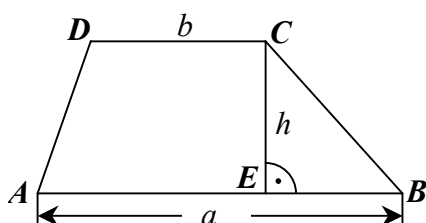
## Twierdzenie Talesa



Jeżeli  $k \parallel l$  i  $l \parallel m$ , to:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

## Czworokąty

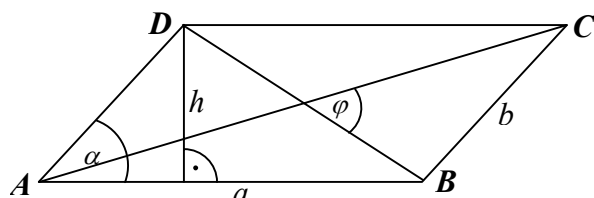


### Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



### Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

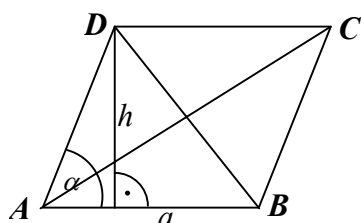
Wzór na pole równoległoboku:

$$P = ah$$

$$P = ab \cdot \sin \alpha$$

$$d_1 = |AC|, d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi}{2}$$



### Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzór na pole rombu:

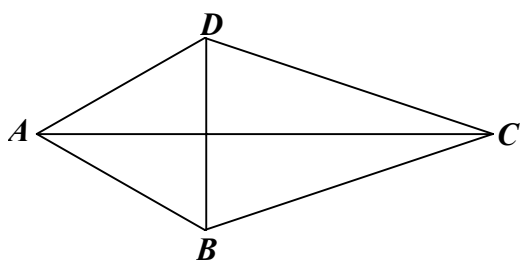
$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$d_1 = |AC|, d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



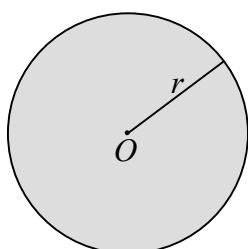


### Deltoid

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych. Wzór na pole deltoidu:

$$d_1 = |AC|, d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



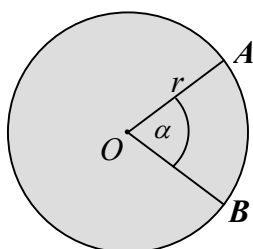
### Koło

$P$  - pole koła o promieniu  $r$

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła

$$Ob = 2\pi r$$



### Wycinek koła

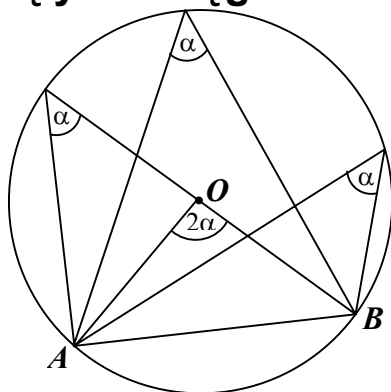
Pole wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$l$  – długość łuku

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

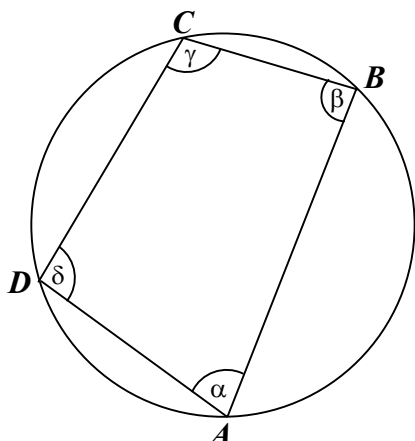
### Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

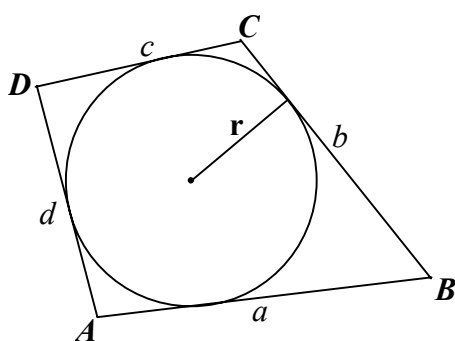
## Okrąg opisany na czworokacie



Na czworokacie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa  $180^\circ$ :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

## Okrąg wpisany w czworokąt



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

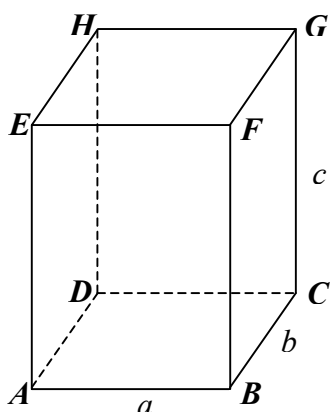
## STEREOMETRIA

### Oznaczenia

$P$  – pole powierzchni całkowitej,  $P_p$  – pole podstawy,

$P_b$  – pole powierzchni bocznej,

$V$  – objętość bryły.

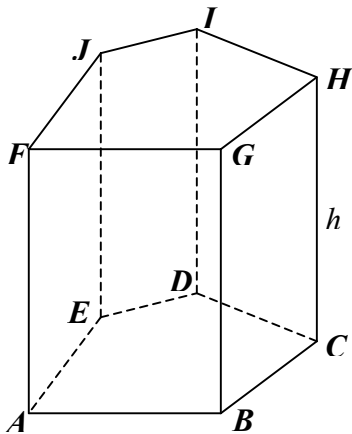


### Prostopadłościan

$a, b, c$  – długości krawędzi

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$



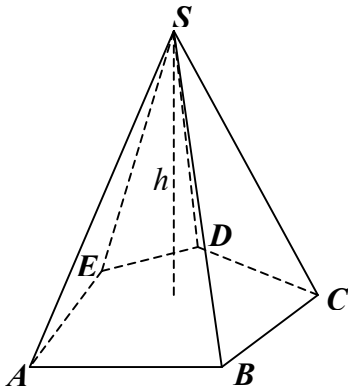
### Graniastosłup prosty

$2p$  – długość obwodu podstawy

$h$  – długość wysokości

$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

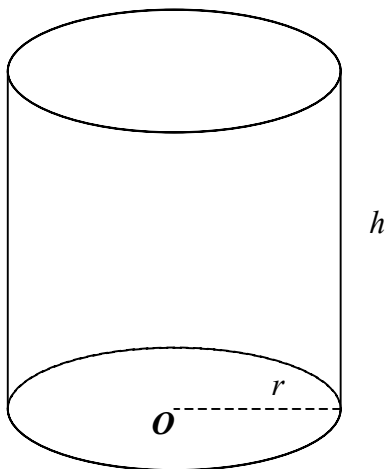


### Ostrosłup

$h$  – długość wysokości

$$P = P_p + P_b$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$



### Walec

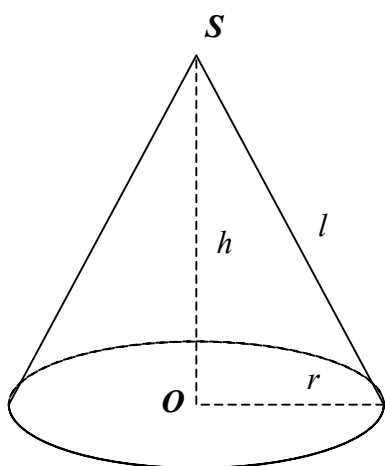
$r$  – długość promienia podstawy

$h$  – długość wysokości

$$P_b = 2\pi r \cdot h$$

$$P = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$



### Stożek

$r$  – długość promienia podstawy

$h$  – długość wysokości

$l$  – długość tworzącej

$$P_b = \pi r l$$

$$P = \pi r(r + l)$$

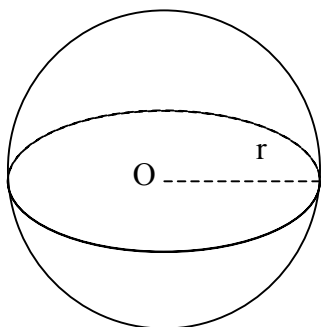
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

### Kula

$r$  – długość promienia kuli

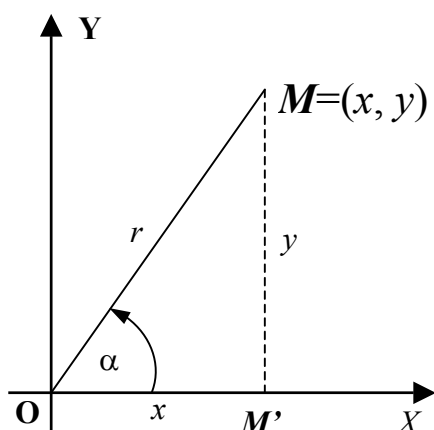
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



## TRYGONOMETRIA

### Definicje funkcji trygonometrycznych



$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , gdzie  $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ :**

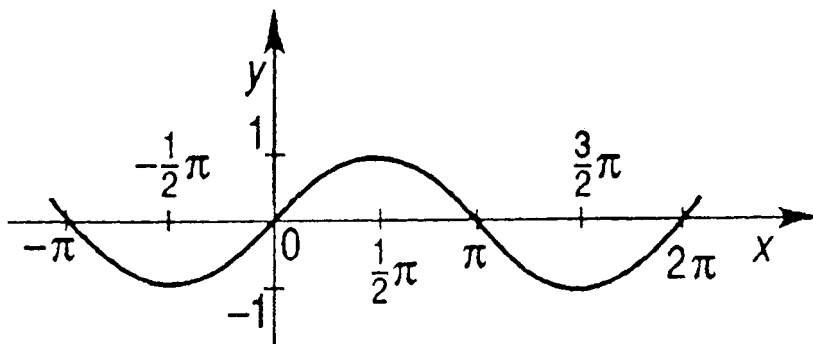
$\alpha$	$\alpha^\circ$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0	0	0	1	0	nie istnieje
$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, 90^\circ)$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2}$	$90^\circ$	1	0	nie istnieje	0
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	+	-	-	-
$\pi$	$180^\circ$	0	-1	0	nie istnieje
$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(180^\circ, 270^\circ)$	-	+	+	+
$\frac{3\pi}{2}$	$270^\circ$	-1	0	nie istnieje	0
$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$(270^\circ, 360^\circ)$	-	+	-	-
$2\pi$	$360^\circ$	0	1	0	nie istnieje

+ oznacza, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

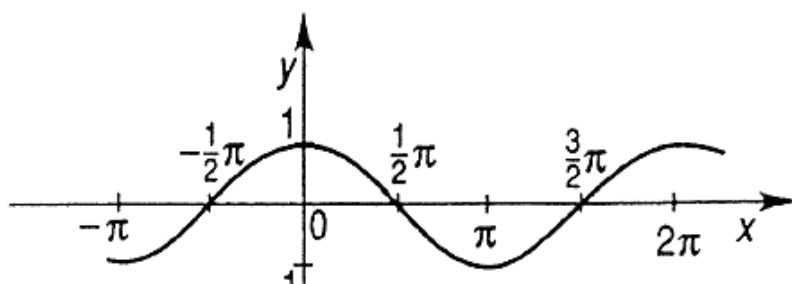
- oznacza, że funkcja przyjmuje wartości ujemne.

## Wykresy funkcji trygonometrycznych

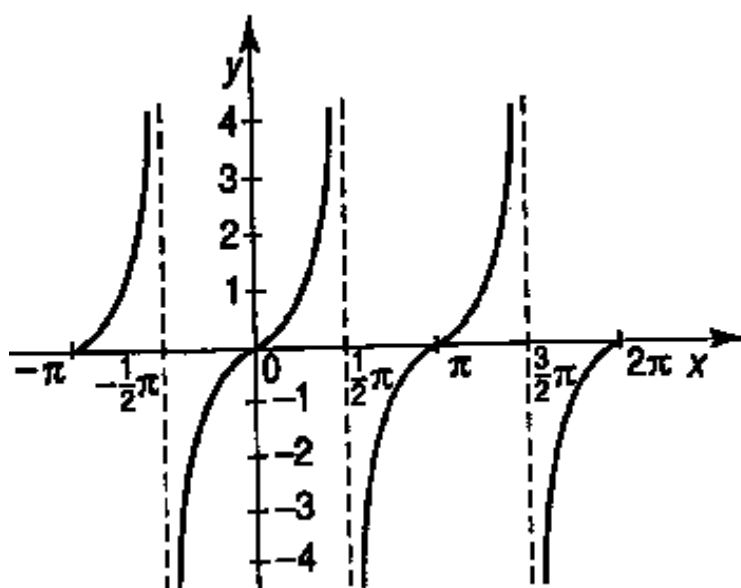
$$y = \sin x$$



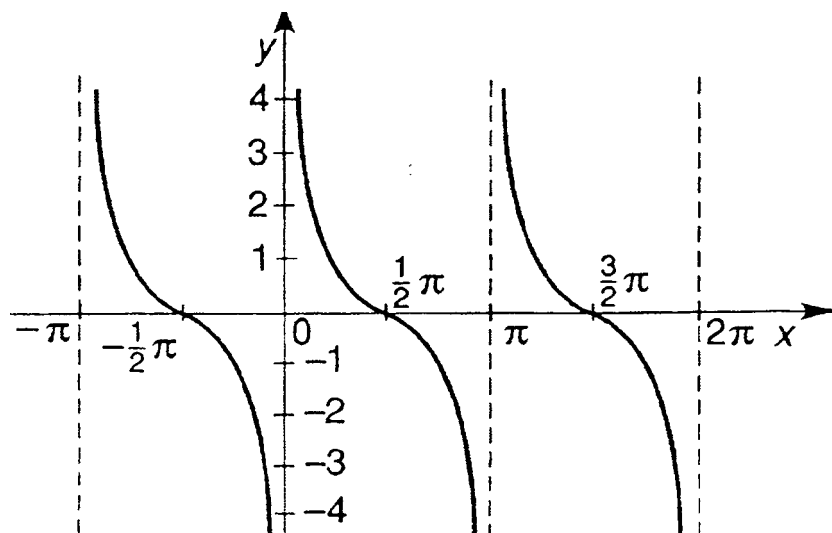
$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \operatorname{ctg} x$$



## Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  dla dowolnego kąta  $\alpha$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  dla  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  dla  $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  dla  $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{C}$

## Wartości funkcji trygonometrycznych:

$\alpha$	$0, (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}, (30^\circ)$	$\frac{\pi}{2}, (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}, (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}, (90^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>nie istnieje</i>
$\operatorname{ctg} \alpha$	<i>nie istnieje</i>	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

## Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

## Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-ctg \alpha$	$-tg \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-tg \alpha$	$-ctg \alpha$

## Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Jeżeli  $1 - tg \alpha \cdot tg \beta \neq 0$ , to

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}$$

Jeżeli  $1 + tg \alpha \cdot tg \beta \neq 0$ , to

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha \cdot tg \beta}$$

Jeżeli  $ctg \alpha + ctg \beta \neq 0$ , to

$$ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg \alpha \cdot ctg \beta - 1}{ctg \alpha + ctg \beta}$$



Jeżeli  $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta \neq 0$ , to

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$$

### **Funkcje kąta podwojonego**

Dla dowolnego kąta  $\alpha$ :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Jeżeli  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{C}$  to

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Jeżeli  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{C}$  i  $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 0$  to

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Jeżeli  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{C}$  i  $\operatorname{ctg}\alpha \neq 0$  to

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\alpha}$$

### **Funkcje kąta potrojonego**

Dla dowolnego kąta  $\alpha$ :

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)$$

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)$$

## Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Dla dowolnych kątów  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

## KOMBINATORYKA

### Permutacje

Liczba sposobów  $P_n$ , w jaki  $n \geq 1$  elementów można ustawić w ciąg, jest wyrażona wzorem:  $P_n = n!$

### Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów  $V_n^k$ , w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg składający się z  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) różnych wyrazów, jest równa:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

### Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów  $W_n^k$ , w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg składający się z  $k$  niekoniecznie różnych wyrazów, jest wyrażona wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

### Kombinacje

Liczba sposobów  $C_n^k$ , w jaki spośród  $n$  elementów można wybrać  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) elementów, jest równa:

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

## RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

### Klasyczna definicja prawdopodobieństwa:

Jeżeli  $\Omega$  jest skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych równoprawdopodobnych i  $A \subset \Omega$ , to liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia  $A$ , gdzie

$|A|, \overline{\overline{A}}, m(A)$  – liczba wszystkich elementów zbioru  $A$ ,

$|\Omega|, \overline{\Omega}, m(\Omega)$  – liczba wszystkich elementów zbioru  $\Omega$ .

### Własności prawdopodobieństwa:

- $0 \leq P(A) \leq 1$  dla każdego  $A \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$   $\Omega$ - zdarzenie pewne
- $P(\emptyset) = 0$   $\emptyset$ - zdarzenie niemożliwe
- $P(A) \leq P(B)$  dla  $A \subset B$
- $P(A') = 1 - P(A)$  gdzie  $A'$  oznacza zdarzenie przeciwne do  $A \subset \Omega$
- Jeżeli  $A \subset \Omega$  i  $B \subset \Omega$ , to prawdopodobieństwo sumy zdarzeń  $A$  i  $B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

### Zdarzenia niezależne

Zdarzenia  $A \subset \Omega$  i  $B \subset \Omega$  są niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

### Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwem warunkowym  $P(A|B)$  zdarzenia  $A$  pod warunkiem, że zaszło zdarzenie  $B$ , nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{gdzie } A \subset \Omega, B \subset \Omega \text{ i } P(B) > 0.$$

### Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia  $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ , spełniają warunki:

1.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$  oraz  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

to dla każdego zdarzenia  $A \subset \Omega$  zachodzi wzór:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

## Twierdzenie Bernoullego

Prawdopodobieństwo  $P_N(k)$  uzyskania dokładnie  $k$  sukcesów ( $0 \leq k \leq N$ ) w schemacie  $N$  prób Bernoullego

wyraża się wzorem:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

gdzie:  $p > 0$ ,  $q > 0$  i  $p + q = 1$

$p$  – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,

$q$  - prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie.

## PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

**Średnia arytmetyczna**  $\bar{a}$  liczb  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  jest równa

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

**Średnia ważona**  $m_n$  liczb  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jest równa

$$m_n = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

**Średnia geometryczna**  $m_g$  dodatnich liczb  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  jest równa

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

**Średnia harmoniczna**  $m_h$  dodatnich liczb  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  jest równa

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

**Mediana**  $M$   $n$  uporządkowanych niemalejąco danych  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$  jest równa

- $M = a_{\frac{n+1}{2}}$  jeżeli  $n$  jest liczbą nieparzystą
- $M = \frac{1}{2} \left( a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} \right)$ , jeżeli  $n$  jest liczbą parzystą

**Wariancja**  $\sigma^2$  z  $n$  uporządkowanych danych  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  jest równa

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + (a_3 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}.$$

**Odchylenie standardowe**  $\sigma$  z  $n$  uporządkowanych danych  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  jest równa

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

### TABLICA FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}$	$\beta [^\circ]$
<b>0</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>90</b>
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
<b>10</b>	<b>0,1736</b>	<b>0,1763</b>	<b>80</b>
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
<b>20</b>	<b>0,3420</b>	<b>0,3640</b>	<b>70</b>
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
<b>30</b>	<b>0,5000</b>	<b>0,5774</b>	<b>60</b>
31	0,5150	0,6009	59

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
<b>50</b>	<b>0,7660</b>	<b>1,1918</b>	<b>40</b>
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
<b>60</b>	<b>0,8660</b>	<b>1,7321</b>	<b>30</b>
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
<b>70</b>	<b>0,9397</b>	<b>2,7475</b>	<b>20</b>
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13

32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
<b>40</b>	<b>0,6428</b>	<b>0,8391</b>	<b>50</b>
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
<b>80</b>	<b>0,9848</b>	<b>5,6713</b>	<b>10</b>
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
<b>90</b>	<b>1,0000</b>	<b>-</b>	<b>0</b>